ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 6, No.1, 15-19, Juli 2009

Ciri-ciri Ideal $\sigma-\mathrm{prim}$ dan Gelanggang Polinom Miring

Amir Kamal Amir[*]

Abstrak

Gelanggang polinom miring atas *R* dengan variabel *x* adalah gelanggang

$$R[x;\sigma,\delta] = \{\, f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \mid a_i \in R \,\},$$

dengan aturan perkalian

$$xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in R,$$

dengan σ adalah suatu endomorfisma dan δ adalah suatu $\sigma-\mathrm{derivatif}$. Dalam paper ini akan diinvestigasi dua hal, yaitu karakteristik atau ciri-ciri ideal *I* dari *R* yang akan merupakan ideal $\sigma-\mathrm{prime}$ dari *R*, dan ciri-ciri dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ yang merupakan gelanggang prim.

Kata Kunci: *Gelanggang polinom miring, ideal prim,* $\sigma-\mathit{prime}$.

1. Gelanggang Polinom Miring

Definisi dari gelanggang polinom miring (gelanggnag tak komutatif) ini pertamakali diperkenalkan oleh Ore (1933), yang mengkombinasikan ide awal dari Hilbert (kasus $\delta=0$) dan Schlessinger (kasus $\sigma=1$). Sejak kemunculan artikel dari Ore ini, gelanggang polinom miring telah memerankan peran yang penting dalam teori gelanggang tak komutatif dan telah banyak peneliti yang bergelut dalam teori gelanggang tak komutatif menginvestigasi bentuk gelanggang tersebut dari berbagai sudut pandang, seperti teori ideal, teori order, teori Galois, dan aljabar homologi.

Definisi 1.
Misalkan R adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ *adalah suatu endomorfisma pada R, dan* δ *adalah suatu* $\sigma-\mathrm{derivatif}$ *, yaitu*
(i). δ *adalah suatu endomorfisma pada R, dengan R sebagai grup penjumlahan,*
(ii). $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$ *untuk setiap* $a,b \in R$*.*
Gelanggang polinom miring atas R dengan variabel x adalah gelanggang

$$R[x;\sigma,\delta] = \left\{ f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \middle| a_i \in R, \text{dengan } xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in R \right\}.$$

Suatu elemen p dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ *mempunyai bentuk kanonik*

$$p = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i,\ r \in \mathbf{Z}_+ = \{0,1,\cdots\},\ a_i \in R,\ i = 1,\cdots,r.$$

[*] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

Teorema 1.
Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ *adalah suatu gelanggang polinom miring, maka*

$$\delta(a^m)=\sum_{i=0}^{m-1}\sigma(a)^i\delta(a)a^{m-1-i},$$

untuk setiap $a\in R$ *dan* $m = 1,2, \ldots$.

Bukti:
Pembuktian menggunakan induksi. Persamaan di atas jelas untuk $m=1$.
Misalkan persamaan di atas benar untuk $m = k$, akan ditunjukkan bahwa persamaan tersebut benar untuk $m=k+1$.

Persamaan benar untuk $m=k$ artinya $\delta(a^k)=\sum_{i=0}^{k-1}\sigma(a)^i\delta(a)a^{k-1-i}$.

Selanjutnya untuk $m = k+1$ diperoleh

$$\begin{aligned}\delta(a^{k+1}) &= \sigma(a)\delta(a^k)+\delta(a)a^k\\ &=\sum_{i=0}^{k-1}\sigma(a)^{i+1}\delta(a)a^{k-1-i}+\delta(a^m)=\sum_{i=0}^{k}\sigma(a)^i\delta(a)a^{k-i}.\ \square\end{aligned}$$

Teorema 2.
Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ *adalah suatu gelanggang polinom miring. Jika R adalah gelanggang komutatif maka* $(a-\sigma(a))\delta(b)=(b-\sigma(b))\delta(a)$ *, untuk semua* $a,b\in R$.

Bukti:
Jalankan δ pada persamaan $ba=ab$ diperoleh

$$\sigma(b)\delta(a)+\delta(b)a=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b.$$

Dari persamaan ini diperoleh $(a-\sigma(a))\delta(b)=(b-\sigma(b))\delta(a).\ \square$

Teorema 3.
Diberikan suatu gelanggang R dan pemetaan-pemetaan $\sigma,\delta:R\to R$. *Misalkan pemetaan* $\phi:R\to M_2(R)$ *didefenisikan dengan aturan* $\phi(r)=\begin{pmatrix}\sigma(r) & \delta(r)\\ 0 & r\end{pmatrix}$, *maka* ϕ *adalah suatu homomorfisma gelanggang jika dan hanya jika* σ *dan* δ *berturut-turut adalah endomorfisma gelanggang dan* σ *-derivatif seperti yang didefinisikan untuk suatu gelanggang polinom miring.*

Bukti:

$$\phi(r+s)=\begin{pmatrix}\sigma(r+s) & \delta(r+s)\\ 0 & r+s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma(r) & \delta(r)\\ 0 & r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma(s) & \delta(s)\\ 0 & s\end{pmatrix}=\phi(r)+\phi(s)$$

$$\phi(rs)=\begin{pmatrix}\sigma(rs) & \delta(rs)\\ 0 & rs\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma(r)\sigma(s) & \sigma(r)\delta(s)+\delta(r)s\\ 0 & rs\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma(r) & \delta(r)\\ 0 & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma(s) & \delta(s)\\ 0 & s\end{pmatrix}$$

$$=\phi(r)\phi(s).\ \square$$

2. Ideal $\sigma-\mathrm{prim}$ dari Gelanggang Polinom Miring $R[x;\sigma,\delta]$

Definisi 2.
Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ adalah suatu gelangang polinom miring. Suatu $\sigma-ideal$ dari R adalah suatu ideal I dari R sedemikian sehingga $\sigma(I)\subseteq I$. Suatu $\sigma-ideal$ prim (atau $\sigma-prim$) adalah suatu $\sigma-ideal$ sejati I dari R sedemikian sehingga jika J, K adalah $\sigma-ideal$ yang memenuhi $JK\subseteq I$, maka $J\subseteq I$ atau $K\subseteq I$. Dalam kasus 0 adalah suatu $\sigma-prim$ ideal dari R, kita katakan R adalah suatu gelanggang $\sigma-prim$.

Teorema 4.
Misalkan σ adalah suatu automorfisma dari gelanggang R, dan misalkan I adalah suatu ideal sejati dari R sedemikian sehingga $\sigma(I)=I$.
I adalah $\sigma-prime$ jika dan hanya jika untuk sembarang $a,c\in R-I$, terdapat $b\in R$ dan $t\in\mathbf{Z}$ sedemikian sehingga $ab\sigma^t(c)\notin I$.

Bukti:
($\Leftarrow$) Misalkan *A, C* adalah $\sigma-ideal$ yang tidak berada dalam ideal *I*. Pilih elemen-elemen $a\in A-I$ dan $c\in C-I$, maka terdapat $b\in R$ dan $t\in\mathbf{Z}$ sedemikian sehingga $ab\sigma^t(c)\notin I$.

Kasus I. Jika $t\geq 0$, maka $\sigma^t(c)\in C$ sehingga dari $ab\sigma^t(c)\notin I$ diperoleh $AC\not\subset I$.

Kasus II. Jika $t<0$, maka dari $ab\sigma^t(c)\notin I$ diperoleh $\sigma^{-t}(a)\sigma^{-t}(b)c\notin\sigma^{-t}(I)=I$. Dalam kasus ini, $\sigma^{-t}(a)\in A$ sehingga $AC\not\subset I$.

Dari kasus I dan II disimpulkan bahwa *I* adalah suatu ideal $\sigma-prime$.

($\Rightarrow$) Misalkan *I* adalah $\sigma - prime$ dan $a,c \in R - I$. Himpunan-himpunan $A = \sum_{i=0}^{\infty} R\sigma^{i}(a)R$ dan $C = \sum_{j=0}^{\infty} R\sigma^{j}(c)R$ adalah $\sigma - ideal$ yang tidak berada dalam ideal *I*, sehingga $AC \not\subset I$.

Konsekuensinya, $\sigma^{i}(a)b\sigma^{j}(c) \notin I$ untuk suatu $i, j \geq 0$, sehingga $a\sigma^{-i}(b)\sigma^{t-i}(c) \notin I$. □

3. Karakteristik dari Gelanggang Polinom Miring Prim

Sebelum masuk ke karakteristik dari gelanggang polinom miring prim disajikan dulu defenisi tentang annihilator yang dibutuhkan dalam pembuktian teorema.

Definisi 3.
Misalkan X adalah suatu himpunan bagian dari suatu gelanggang R, maka $r.ann(X) = \{r \in R \mid Xr = 0\}$ *disebut annihilator kanan dari X dan* $l.ann(X) = \{r \in R \mid rX = 0\}$ *disebut annihilator kiri dari X.*

Teorema 5.
Misalkan $T = R[x;\sigma,\delta]$ *dan untuk setiap elemen-elemen taknol* $a,b \in R$, *terdapat suatu bilangan bulat taknol n sedemikian sehingga* $aR\sigma^{n}(b) \neq 0$ *atau* $aR\delta^{n}(b) \neq 0$, *maka T adalah suatu gelanggang prim.*

Bukti:
Andaikan *T* adalah bukan suatu gelanggang prim, maka *T* memuat ideal-ideal taknol *A* dan *B* sedemikian sehingga $AB = 0$. Tanpa mengurangi berlaku umumnya pembuktian kita bisa memisalkan *A = l.ann(B)* dan *B = r.ann(A).*
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A \cap R \neq 0$. Untuk menunjukkan hal ini, akan akan ditunjukkan bahwa $\sigma^{-m}(u_m) \in A$ atau dengan kata lain $\sigma^{-m}(u_m)B = 0$. Namun demikian untuk menunjukkkan bahwa $\sigma^{-m}(u_m)B = 0$, kita cukup menunjukkan bahwa $\sigma^{-m}(u_m)C = 0$ dimana *C = r.ann(u).*
Pilih suatu elemen $u \in A$ yang mempunyai derajat minimal, katakan *m,* dan koefisien awal u_m.
Andaikan $\sigma^{-m}(u_m)C \neq 0$, pilih $v \in C$ dengan $\sigma^{-m}(u_m)v \neq 0$, derajat minimal *n*, dan koefisien awal adalah v_n. Karena $v \in C$, maka kita mempunyai $uv = 0$ dan $u_m\sigma^{m}(v_n) = 0$. Dari sini terlihat bahwa $der(uv_n) < m$. Sifat keminimalan dari *m* menyebabkan $uv_n = 0$. Hal ini mengakibatkan $u(v - v_n x^{n}) = 0$. Ini berarti bahwa $v - v_n x^{n} = 0$ adalah suatu elemen dari *C* dengan derajat kurang dari *n*, sehingga dengan sifat keminimalan derajat *v* yaitu *n*, maka $v - v_n x^{n} = 0$, sehingga $\sigma^{-m}(u_m)(v - v_n x^{n}) = 0$. Namun demikian, karena $u_m\sigma^{m}(v_n) = 0$,

maka diperoleh $\sigma^{-m}(u_m)v_n = 0,$ sehingga dari persamaan $\sigma^{-m}(u_m)(v - v_n x^n) = 0$ diperoleh $\sigma^{-m}(u_m)v = 0.$ Hal ini kontradiksi dengan pemilihan *v*. Dengan demikian haruslah $\sigma^{-m}(u_m) \in A$ atau $A \cap R \neq 0.$

Dengan langkah dan logika yang analog dengan di atas, dengan mudah dapat juga ditunjukkan bahwa $B \cap R \neq 0.$ Sekarang kita sudah mempunyai $A \cap R \neq 0$ dan $B \cap R \neq 0.$ Selanjutnya pilih elemen-elemen taknol $a \in A \cap R$ dan $b \in B \cap R.$ Dengan menggunakan hipotesis dari teorema, terdapat bilangan bulat taknegatif *n* dan suatu elemen $r \in R$ sedemikian sehingga $aR\sigma^n(b) \neq 0$ atau $aR\delta^n(b) \neq 0$.

Kasus I. Jika *n = 0*, maka $arb \neq 0$ dan $AB \neq 0$. Kontradiksi dengan pernyataan lebih awal bahwa *AB = 0*.

Kasus II. Jika *n > 0,* maka $arx^n b = ar\sigma^n(b)x^n + [\cdots] + ar\delta^n(b) \neq 0$, sehingga diperoleh lagi $AB \neq 0$. Kontradiksi juga dengan pernyataan lebih awal bahwa *AB = 0*.

Dari dua kasus di atas disimpulkan bahwa *T* haruslah suatu gelanggang prim. □

4. Kesimpulan

Dari paparan di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Untuk memeriksa apakah suatu ideal $\sigma - ideal$ I merupakan suatu ideal $\sigma - prime$**,** cukup diperiksa bahwa untuk sembarang $a, c \in R - I,$ terdapat $b \in R$ dan $t \in \mathbf{Z}$ sedemikaina sehingga $ab\sigma^n(c) \notin I$.
2. Untuk memeriksa apakah suatu gelanggang polinom miring $T = R[x; \sigma, \delta]$ merupakan suatu gelanggang prim, cukup diperiksa bahwa untuk setiap elemen-elemen taknol $a, b \in R$, terdapat suatu bilangan bulat taknol *n* sedemikian sehingga $aR\sigma^n(b) \neq 0$ atau $aR\delta^n(b) \neq 0$.

Daftar Pustaka

[1] Goodearl, K.R., 1992, Prime ideals in skew polinomial ring and quantized Weyl algebras, *J. of Algebra*, 150: 324-377.

[2] Goodearl, K.R. & Letzter, E.S., 1994, Prime ideals in skew and *q*-skew polynomial rings, *Memori of The A.M.S*, 109.

[3] McConnel, J.C. & Robson, J.C., 1987, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley & Sons.

[4] Ore, O., 1933, Theory of non-Commutative polynomials, *Annals of Math*, 34: 480-508.