

The application of ARIMA and Residual Bootstrap for Forecasting Dynamic Mortality in the PLAT Model for Indonesian Male Population

Penerapan ARIMA dan *Residual Bootstrap* untuk Peramalan Mortalitas Dinamis Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki di Indonesia

Fery Widhiatmoko^{*1}, Danardono², Mila Kurniawaty³, Amanda Nadhifa Maydika⁴,
Thessalonika Sandra Devina Nishi⁵, Chasib Idris⁶

^{1,3,4,5,6}Department of Mathematics, Brawijaya University

²Department of Mathematics, Gadjah Mada University

Email: ¹fery.widhiatmoko@ub.ac.id, ²danardono@ugm.ac.id, ³mila_n12@ub.ac.id,
⁴mandamaydika@student.ub.ac.id, ⁵sandradevina@student.ub.ac.id, ⁶idrischasib@gmail.com

^{*}Corresponding author

Received: 9 October 2024, revised: 2 December 2024, accepted: 10 December 2024

Abstract

The development of mortality tables in Indonesia so far has been based on static mortality tables, which only consider the probability of death by age, even though they are applied across different years. A dynamic analysis of mortality tables, which takes into account the observation year and the birth year of individuals, becomes important for mitigating risks, particularly in life insurance and pension fund applications. Numerous methods and models for determining stochastic mortality to form dynamic mortality tables exist, but in this study, the PLAT stochastic mortality model was used to establish dynamic mortality tables because it is suitable for all age ranges, captures cohort effects, aligns with historical data, has a non-trivial (yet not overly complex) correlation structure, does not have robustness issues, and can account for parameter risk, while maintaining a relatively simple model structure. From these mortality tables, future survival probabilities for the next several years were forecasted using the ARIMA method, and the forecast range was estimated using residual bootstrap. The forecasting results show values that do not differ significantly from Indonesia's 2023 mortality table. Additionally, the width of the confidence intervals derived using residual bootstrap was larger than the intervals without using the residual bootstrap method, particularly for younger ages. This is significant for mortality research in pension planning, as they provide interval simulations that reflect various factors during the estimation process.



JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

Keywords: *stochastics mortality model, PLAT Mortality Model, ARIMA, residual bootstrap*

Abstrak

Pembentukan tabel mortalita yang ada di Indonesia selama ini adalah tabel mortalitas statik yang hanya melihat peluang meninggal berdasarkan usia saja meskipun pada tahun yang berbeda. Analisis tabel mortalita secara dinamik yang memperhatikan tahun pengamatan dan juga kapan individu lahir menjadi penting untuk memitigasi risiko terutama dalam penerapannya di bidang asuransi jiwa dan dana pensiun. Banyak metode dan model terkait penentuan mortalita secara stokastik untuk pembentukan tabel mortalitas dinamik, namun pada penelitian ini digunakan model mortalitas stokastik model PLAT untuk menentukan tabel mortalitas dinamik karena memiliki model yang sesuai untuk semua rentang usia, menangkap efek *cohort*, sesuai dengan data historis, memiliki non-trivial (tetapi tidak begitu kompleks) struktur korelasi, tidak memiliki masalah dengan *robust* dan dapat memperhitungkan risiko parameter, sedangkan strukturnya modelnya tetap relatif sederhana. Kemudian dari tabel mortalitas tersebut dibuat suatu peramalan nilai peluang hidup untuk beberapa tahun ke depan menggunakan metode ARIMA dan dicari rentang peramalannya menggunakan residual bootstrap. Hasil peramalan menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda dengan tabel mortalita Indonesia tahun 2023 selain itu lebar interval kepercayaan hasil peramalan menggunakan residual bootstrap lebih besar dari interval tanpa menggunakan metode residual bootstrap terutama untuk usia yang lebih muda. Hal ini penting dalam penelitian tingkat kematian untuk perencanaan pensiun, karena menghasilkan simulasi interval yang mencerminkan berbagai faktor selama proses estimasi.

Kata kunci: tabel mortalitas stokastik, model mortalitas PLAT, ARIMA, *residual bootstrap*.

1. PENDAHULUAN

Tabel mortalita adalah suatu alat statistik yang digunakan oleh aktuaris, demograf, pegawai kesehatan masyarakat dan lainnya untuk menyajikan pengalaman kematian populasi. Keterangan-keterangan tentang jumlah penduduk yang meninggal pada berbagai tingkat usia, yang bertahan hidup pada berbagai tingkat usia dan tentang usia rata-rata yang mereka capai diterangkan oleh tabel mortalita [3]. Tabel ini memberikan gambaran tentang sejarah kehidupan suatu *cohort* hipotetik, yaitu banyaknya orang yang lahir pada saat yang sama dan kemudian secara berangsur-angsur akan berkurang jumlahnya karena suatu kematian. Mortalitas atau kematian sendiri merupakan salah satu diantara tiga komponen proses demografi yang berpengaruh terhadap struktur penduduk selain fertilitas dan migrasi.

Menurut Dickson [6] tabel mortalita adalah suatu alat statistik yang digunakan oleh aktuaris, demograf, pegawai kesehatan masyarakat dan lainnya untuk menyajikan pengalaman kematian populasi. Pembentukan tabel mortalita sendiri terdiri dari dua tahapan. Tahap pertama yaitu penentuan model yang diberikan sebagai suatu asumsi yang biasanya dinyatakan dalam formulasi matematik, dan tahapan yang kedua adalah pengumpulan data untuk mendapatkan informasi yang dapat digunakan untuk memberi karakteristik pada model atau memberikan spesifikasi pada model yang sesuai dengan fenomena yang menjadi perhatian [2]. Menurut Macdonald, dkk. [10] ketika peluang suatu kematian diobservasi maka kematian dipilih sebagai salah satu kemungkinan acak dari suatu kematian, sehingga bentuk usia kematian juga akan menjadi acak pada masa depan. Oleh karena itu sebuah model stokastik untuk proyeksi mortalitas kemudian dibutuhkan karena model

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

stokastik dapat memperkirakan bagaimana kemungkinan hasil yang diperoleh berada dalam peramalan untuk memprediksi kondisi pada situasi yang berbeda.

Pembentukan tabel mortalita yang ada di Indonesia selama ini adalah tabel mortalitas statik yang hanya melihat peluang meninggal berdasarkan usia saja meskipun pada tahun yang berbeda [3]. Analisis tabel mortalita secara dinamik yang memperhatikan tahun pengamatan dan juga kapan individu lahir menjadi penting untuk memitigasi risiko terutama dalam penerapannya di bidang asuransi jiwa. Norkhairunnisa Redzwan [11] mengatakan bahwa studi tentang mortalitas sangat penting dalam bidang demografi dan aktuaria karena membantu para pembuat kebijakan dan perusahaan asuransi jiwa dalam mengelola risiko umur panjang dan kematian. Dalam beberapa dekade terakhir, banyak model mortalitas ekstrapolatif yang telah dikembangkan mengikuti model Lee-Carter. Dalam studinya diberikan penjelasan komprehensif tentang model Lee-Carter dengan fokus pada teknik *fitting* dan simulasi peramalan dengan memasang tingkat mortalitas dari populasi Malaysia untuk tahun 1991 hingga 2012 dan memproyeksikan tingkat mortalitas untuk tahun 2013 hingga 2018 menggunakan model *autoregressive integrated moving average* (ARIMA) (0,1,0) dengan menggunakan simulasi indeks mortalitas. Temuan menunjukkan bahwa model Lee-Carter berkinerja baik untuk dataset ini berdasarkan pengukuran akurasi standar yang dihitung dan memberikan saran untuk menggunakan model stokastik lain sebagai perbandingan.

Pada Tahun 2009, Richard Plat [12] mengenalkan suatu model mortalitas stokastik yang baru yaitu model PLAT. Model ini merupakan gabungan dari model mortalitas stokastik yang telah ada sebelumnya yaitu model Cairns-Blake-Dowd dan sedikit fitur yang terdapat pada model Lee-Carter sehingga diperoleh sebuah model yang memiliki kelebihan dan meminimalisir kekurangan-kekurangan pada model-model sebelumnya. Model ini selain menerapkan fungsi usia statis, α_x , juga memiliki 4 faktor stokastik yaitu $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$, $\kappa_t^{(3)}$, dan γ_{t-x} sehingga bisa sesuai untuk semua rentang usia, menangkap efek cohort, sesuai dengan data historis, memiliki non-trivial (tetapi tidak begitu kompleks) struktur korelasi, tidak memiliki masalah dengan robust dan dapat memperhitungkan risiko parameter, sedangkan strukturnya modelnya tetap relatif sederhana.

Salvatore Scognamiglio [16] mengatakan bahwa banyak model mortalitas stokastik yang sulit untuk dianalisis sehingga ketidakpastian parameter biasanya dianalisis menggunakan prosedur bootstrap. Penggunaan metode *residual bootstrap* karena interval prediksi yang diperoleh pada ARIMA hanya menjelaskan ketidakpastian yang timbul dari kesalahan dalam perkiraan periode dan indeks *cohort* untuk memperkirakan penyebaran tingkat kematian di masa depan dan mengabaikan ketidakpastian yang timbul dari estimasi parameter pada model.

Stefan Tappe [17] juga mengatakan bahwa proyeksi demografis dari tingkat kematian masa depan melibatkan tingkat ketidakpastian yang tinggi dan membutuhkan model mortalitas stokastik. Stefan Tape menunjukkan *forward mortality models* yang berdasarkan oleh proses Wiener (mungkin berdimensi tak terbatas) dan ukuran acak Poisson yang dikompensasi. Dalam praktiknya, gagasan peningkatan mortalitas merupakan alat yang nyaman untuk kuantifikasi perubahan dalam tingkat kematian dari waktu ke waktu yang memungkinkan, misalnya, deteksi efek cohort.

Eric Beutner [1] membuktikan konsistensi bootstrap untuk kelas umum dari model volatilitas dan interval berdasarkan *Value-at-Risk*. Berdasarkan simulasinya diungkapkan bahwa interval bootstrap dengan *equal-tailed percentile* cenderung memberikan hasil kurang dari nilai nominalnya. Sebaliknya, *interval bootstrap reversed-tails* menghasilkan cakupan yang akurat. Selain itu dibandingkan residual bootstrap yang dianalisis secara teoritis dengan *recursive-design bootstrap* diperoleh hasil bahwa *residual bootstrap* berkinerja sama baiknya dalam penentuan rata-rata, namun pada sampel yang lebih sedikit menghasilkan rata-rata dengan interval yang lebih pendek.

Melalui hasil estimasi tabel mortalita menggunakan model mortalitas stokastik PLAT pada penelitian ini akan dilakukan peramalan menggunakan metode ARIMA dan analisis ketakpastian

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

dari hasil peramalan tersebut menggunakan *residual bootstrap*. Berdasarkan hal tersebut akan dikembangkan suatu model berdasarkan data mortalitas penduduk di Indonesia untuk membuat tabel mortalita dinamik yang bisa disesuaikan dengan beberapa kriteria individu dan dapat dikembangkan untuk proses peramalan tabel mortalitas ke depannya. Hasil peramalan tersebut akan dibandingkan dengan tabel mortalita Indonesia 2023 yang saat ini digunakan di industri asuransi jiwa Indonesia.

2. METODE PENELITIAN

2.1. Data Penduduk Laki-Laki Indonesia

Data sekunder yang digunakan untuk pemodelan terdiri dari data jumlah kematian dan data jumlah populasi penduduk laki-laki negara Indonesia pada tahun 1984 sampai 2023 yang diperoleh dari portal [World Population Prospects](#)

Tabel 2.1. Data Jumlah Kematian Penduduk per 1000 Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2023

Usia	Jumlah Kematian Penduduk per 1000 Penduduk				
	1984	1985	...	2022	2023
0	221,591	210,331	...	45,471	43,578
1	29,720	28,194	...	2,886	2,739
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	0,029	0,030	...	0,123	0,140
100	0,044	0,046	...	0,135	0,153

Tabel 2.2. Data Populasi Penduduk per 1000 Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2023

Usia	Jumlah Populasi Penduduk per 1000 Penduduk				
	1984	1985	...	2022	2023
0	2455,233	2420,687	...	2290,348	2276,418
1	2372,228	2375,775	...	2298,114	2283,754
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	0,056	0,0575	...	0,245	0,279
100	0,0765	0,079	...	0,243	0,277

2.2. Estimasi Parameter Model Regresi

Estimasi parameter dari model mortalitas stokastik pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode estimasi likelihood maksimum pada regresi Poisson. Regresi Poisson digunakan sebagai asumsi untuk model PLAT sesuai persamaan

$$\eta_{x,t} = \ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x)\kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x} \quad (2.1)$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

Coughlan et al. [4] menyatakan bahwa *stochastic mortality models* merupakan model dari tingkat kematian pusat atau tingkat kematian awal. Berdasarkan hal tersebut Plat [12] menentukan tingkat mortalita μ_{x+t} dengan fungsi *link* log dan mengestimasi parameter dari model dengan asumsi kematian berdistribusi Poisson. Transformasi parameter pada persamaan (2.1) membuat prediktor pada persamaan tersebut tidak berubah yaitu

$$\left(\alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}, \gamma_{t-x}\right) \rightarrow \left(\alpha_x + \phi_1 - \phi_2 x + \phi_3 x^2, \kappa_t^{(1)} + \phi_2 t + \phi_3 (t^2 - 2\bar{x}t), \kappa_t^{(2)} + 2\phi_3 t, \kappa_t^{(3)}, \right. \\ \left. \gamma_{t-x} - \phi_1 - \phi_2 (t-x) - \phi_3 (t-x)^2\right) \quad (2.2)$$

$$\left(\alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}, \gamma_{t-x}\right) \rightarrow \left(\alpha_x + c_1 + c_2 (\bar{x} - x) + c_3 (\bar{x} - x)^+, \right. \\ \left. \kappa_t^{(1)} - c_1, \kappa_t^{(2)} - c_2, \kappa_t^{(3)} - c_3, \gamma_{t-x}\right) \quad (2.3)$$

dimana $c_1, c_2, c_3, \phi_1, \phi_2$, dan ϕ_3 adalah konstan dari suatu bilangan real. Berikut ini merupakan *parameter constraint* yang dikenakan untuk memastikan *identifiability*-nya

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0, \sum_t \kappa_t^{(3)} = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2\gamma_c = 0,$$

Tiga *constraint* pertama memastikan bahwa indeks periode terpusat disekitar nol, sementara tiga *constraint* terakhir memastikan efek *cohort* berfluktuasi disekitar nol dan tidak mempunyai tren linear atau kuadratik. Menurut Haberman dan Renshaw [7] *constraint* pada efek *cohort* bisa dikenakan dengan menerapkan transformasi pada persamaan (2.2) dengan nilai konstan ϕ_1, ϕ_2 , dan ϕ_3 yang diperoleh dengan meregresikan γ_{t-x} pada $t-x$ dan $(t-x)^2$ sehingga

$$\gamma_{t-x} = \phi_1 + \phi_2 (t-x) + \phi_3 (t-x)^2 + e_{t-x}^{\kappa}, \quad e_{t-x}^{\kappa} \square N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d}$$

Constraint pada indeks periode kemudian dapat dikenakan dengan menerapkan transformasi persamaan (2.3) dengan

$$c_i = \frac{1}{n} \sum_t \kappa_t^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3$$

Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan fungsi likelihood dari model regresi poisson. Dengan mengasumsikan $D_{x,t_1}, D_{x,t_2}, \dots, D_{x,t_N}$ adalah kumpulan variabel random yang independen menyatakan jumlah kematian sehingga diperoleh $D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t}^c m_{x,t})$ dengan $E_{x,t}^c$ merupakan konstanta menyatakan jumlah eksposur atau orang yang hidup. Misal $E_{x,t}^c m_{x,t} = \lambda_{x,t}$ merupakan prediksi angka harapan kematian untuk usia x pada tahun t pada model PLAT. Maka fungsi likelihood untuk model tersebut adalah

$$L(\lambda_{x,t}) = \prod_{x,t} p(d_{x,t}; \lambda_{x,t}) = \prod_{x,t} \frac{\lambda_{x,t}^{d_{x,t}}}{d_{x,t}!} \cdot \exp(-\lambda_{x,t})$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

$$= \left(\prod_{x,t} \frac{1}{d_{x,t}!} \right) \cdot \lambda_{x,t}^{\sum d_{x,t}} \cdot \exp(-\sum_{x,t} \lambda_{x,t}) \quad (2.4)$$

Selanjutnya dari fungsi likelihood persamaan (2.4) diambil nilai logaritmanya sehingga diperoleh fungsi log-likelihood sebagai berikut,

$$\begin{aligned} l(\lambda_{x,t}) &= \ln \left[\left(\prod_{x,t} \frac{1}{d_{x,t}!} \right) \cdot \lambda_{x,t}^{\sum d_{x,t}} \cdot \exp(-\sum_{x,t} \lambda_{x,t}) \right] \\ &= \ln \left(\prod_{x,t} \frac{1}{d_{x,t}!} \right) + \sum_{x,t} d_{x,t} \cdot \ln(\lambda_{x,t}) - \sum_{x,t} \lambda_{x,t} \\ &= \sum_{x,t} \left[d_{x,t} \cdot \ln(\lambda_{x,t}) - \lambda_{x,t} - \ln(d_{x,t}!) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan nilai

$$\lambda_{x,t} = E_{x,t}^c \cdot \exp \left(\alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x) \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x} \right).$$

Untuk mendapatkan estimasi parameter, maka fungsi *log-likelihood* pada persamaan (2.5) diturunkan terhadap masing-masing parameter α_x untuk setiap usia x , parameter $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$, dan $\kappa_t^{(3)}$ untuk setiap periode t dan parameter γ_{t-x} untuk setiap *cohort* $t-x$.

Melihat hasil dari *log-likelihood* model PLAT pada persamaan (2.5), turunan dari fungsi *log-likelihood* $l(\beta)$ dengan $\beta = \lambda_{x,t}$ terhadap masing-masing parameter menghasilkan persamaan non-linear (masih memuat x_i). Misalkan pada persamaan model PLAT masih termuat suku

$$\exp(\alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x) \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}).$$

yang menyebabkan bentuk pasti dari $\hat{\beta}$ sulit ditentukan. Oleh karena itu, estimasi $\hat{\beta}$ untuk masing-masing parameter model dilakukan secara iteratif dengan bantuan komputer

2.3. Peramalan dengan Model ARIMA

Seperti yang dijelaskan oleh Currie [5], tantangan utama dalam meramalkan model mortalitas stokastik adalah menentukan dinamika dari efek cohort. Berdasarkan hal tersebut Lovász [9] sebelumnya menjelaskan bahwa model ARIMA bisa digunakan pada hal tersebut karena pada model ARIMA menggunakan nilai masa lalu dan sekarang dari variabel dependen untuk menghasilkan peramalan yang akurat. Hal ini sangat sesuai dengan ciri model mortalitas stokastik yang konsisten dengan data historik. Adapun langkah-langkah yang telah dilakukan untuk melakukan analisis time series pada penelitian ini yaitu :

1. Membuat plot data.
2. Pengecekan stationeritas dari data berdasarkan plot data atau dengan plot ACF dan PACF atau dengan uji ADF dan Ljung-Box. Jika data belum stasioner maka akan dilakukan *differencing* pada data dengan ketentuan sebagai berikut

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

$$B^d \cdot \kappa_t = \kappa_{t-d} \text{ dan } B^d \cdot \gamma_{t-x} = B \cdot \gamma_{t-x-d}$$

notasi B yang dipasang pada κ_t dan γ_{t-x} , mempunyai pengaruh menggeser data dari d periode ke belakang.

Parameter $\kappa_t^{(i)}$ diasumsikan mengikuti model *Multivariate Random Walk with drift*. Sehingga untuk $\kappa_t^{(i)}$ memiliki bentuk

$$\kappa_t = \mu + \kappa_{t-1} + \varepsilon_t^{\kappa} \quad \varepsilon_t^{\kappa} \square N(0, \Sigma)$$

dengan μ parameter *drift* dan Σ adalah *multivariate white noise*.

Nilai estimasi dari μ adalah

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T-1} \sum_t^T \kappa_t - \kappa_{t-1} = \frac{\kappa_T - \kappa_{t-1}}{T-1}$$

yang hanya bergantung pada nilai estimasi akhir dan pertama pada $\kappa_t^{(i)}$ serta banyaknya estimasi T . Sedangkan untuk γ_{t-x} mengikuti proses univariate ARIMA yang independen dengan indek periode $\kappa_t^{(i)}$.

3. Jika data telah stationer dilakukan identifikasi model ARIMA yang cocok. Untuk melakukan proses identifikasi dapat dibantu dengan melihat plot ACF maupun PACF.
4. Setelah diperoleh model ARIMA awal lakukan Overfitting yaitu metode pemeriksaan model yang mungkin terjadi di sekitar model awal untuk mendapatkan model yang terbaik
5. Setelah mendapatkan model yang lolos uji signifikansi parameter, langkah selanjutnya adalah pemeriksaan diagnostik untuk membuktikan bahwa model tersebut cukup memadai
6. Dari hasil tersebut mungkin saja ada beberapa model yang baik untuk digunakan. Sehingga langkah selanjutnya adalah memilih model terbaik dengan melihat beberapa indikator lain, seperti *Akaike's Information Criterion (AIC)* dan *Bayesian Information Criteria (BIC)*. Semakin kecil nilai AIC dan BIC maka model tersebut semakin baik.
7. Setelah mendapatkan model yang terbaik kemudian lakukan peramalan untuk beberapa periode kedepan.

Dalam penentuan interval prediksi pada simulasi peramalan, penentuan interval prediksi pada ARIMA hanya berdasarkan kesalahan pada peramalan periode dan *cohort* dan mengabaikan ketidakpastian yang muncul karena estimasi parameter pada model mortalitas stokastik. Karena ketidakmampuan dalam menganalisis (*analytical intractability*) pada banyak model mortalitas stokastik, simulasi yang berkaitan dengan ketidakpastian parameter biasanya dijelaskan dengan menggunakan metode *Residual Bootstrap*.

2.4. Metode *Residual Bootstrap*

Bootstrap residual merupakan metode simulasi berbasis data yang proses resamplingnya diterapkan pada residual yang dihasilkan oleh model analisis regresi. Metode ini digunakan untuk mengestimasi dan melakukan simulasi properti estimator parameter model mortalitas stokastik karena interval prediksi yang diperoleh pada ARIMA hanya menjelaskan ketidakpastian yang timbul dari kesalahan dalam peramalan periode dan indeks cohort untuk memperkirakan penyebaran

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

tingkat kematian di masa depan dan mengabaikan ketidakpastian yang timbul dari estimasi parameter pada model. Berikut ini adalah langkah-langkah metode residual bootstrap untuk estimasi parameter regresi yang diambil berdasarkan pendapat dari Sahinler dan Topuz [15] serta Rashid [14], yaitu

1. Diberikan sampel acak berukuran n untuk data dari variabel dependen dan independen yang ditulis sebagai $y_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$
2. Melakukan estimasi parameter regresi Poisson pada data dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). MLE dari β_j dalam model regresi adalah nilai dari β_j dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood*-nya.
3. Secara intensif berurutan mencari nilai-nilai $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$ yang memaksimumkan $l(\beta)$ menggunakan metode *Fisher Scoring*.
4. Menghitung tingkat akurasi estimasi parameter yang diperoleh dari metode iterasi tersebut.
5. Menghitung residual
6. Sampel random berukuran n sebanyak B dengan pengambilan dari himpunan-himpunan residualnya,
7. Menambahkan setiap himpunan residual bootstrap dengan \hat{y}_i untuk memperoleh sampel bootstrap y_i^{*b}
8. Estimasi parameter bootstrap setiap sampel bootstrap
9. Estimasi parameter bootstrap adalah mean dari estimasi parameter setiap sampel bootstrap.
10. Menghitung tingkat akurasi estimasi parameter yang diperoleh dengan menggunakan statistik standar error dari bootstrap dan interval konfidensi dari bootstrap.

Estimasi interval konfidensi bootstrap untuk parameter regresi diberikan dalam interval persentil. Pemanfaatan metode bootstrap dalam mengkonstruksi interval ini adalah untuk menentukan standar *error* dari estimator. Interval konfidensi bootstrap persentil didasarkan pada distribusi estimator bootstrap. Dari distribusi ini dapat dihitung nilai persentil yang merupakan ide dasar konstruksi interval konfidensi bootstrap persentil

2.5. Estimasi $q_{x,t}$ pada Tabel Mortalita Dinamik

Setelah mendapatkan nilai $\kappa_t^{(i)}$ dan γ_{t-x} untuk tahun peramalan parameter estimasi dimasukkan kembali ke modelnya masing-masing dengan bentuk umum sesuai persamaan (2.1). Selanjutnya akan dicari peluang kematian seseorang berusia x pada tahun ke- t yaitu $q_{x,t}$. Menurut London [8] jika diketahui nilai nilai *central death rate*, $m_{x,t}$, maka bisa diperoleh hubungan dengan peluang kematian, $q_{x,t}$, yaitu

$$\hat{q}_{x,t} = \frac{2\hat{m}_{x,t}}{2 + \hat{m}_{x,t}} \quad (2.6)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Fitting

Melalui data jumlah kematian dan jumlah populasi yang diperoleh akan dilakukan estimasi nilai-nilai parameter pada model PLAT untuk memperoleh nilai estimasi untuk masing-masing parameternya. Estimasi parameter diolah dengan menggunakan bantuan software R dan diperoleh hasil pada Tabel 3.1 sampai Tabel 3.3 berikut:

Tabel 3.1. Estimasi Parameter α_x Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019

Usia	0	1	...	99	100
$\hat{\alpha}_x$	-3,13992	-5,41345	...	-0,63405	-0,54275

Tabel 3.2. Estimasi Parameter $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$, dan $\kappa_t^{(3)}$ Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019

Periode	1984	1985	...	2018	2019
$\hat{\kappa}_t^{(1)}$	0.126749	0.098395	...	-0.09878	-0.113
$\hat{\kappa}_t^{(2)}$	0.003659	0.00265	...	-0.00127	-0.00137
$\hat{\kappa}_t^{(3)}$	0.007733	0.008484	...	-0.0073	-0.00857

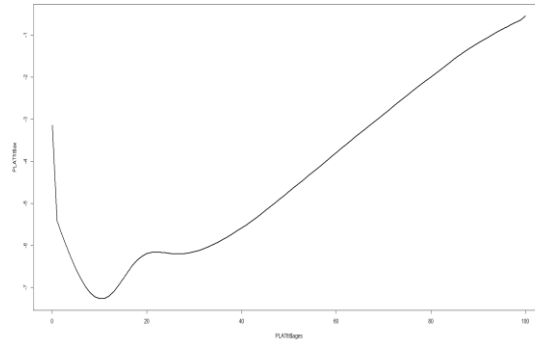
Tabel 3.3. Estimasi Parameter γ_{t-x} Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019

Cohort	1884	1885	...	2018	2019
$\hat{\gamma}_{t-x}$	0,045856	0,033172	...	-0,14032	-0,06274

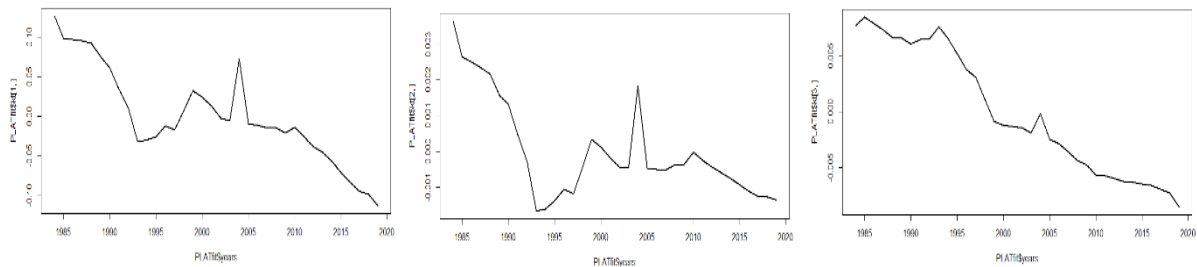
Parameter $\hat{\alpha}_x$ menunjukkan tingkat kematian pada usia awal cukup tinggi kemudian menurun seiring faktor usia dan kemudian melonjak naik seiring usia remaja dan awal dewasa kemudian naik secara tetap seiring bertambahnya usia. Parameter $\hat{\kappa}_t^{(1)}$ menunjukkan tingkat kematian untuk semua umur secara umum tiap tahunnya, $\hat{\kappa}_t^{(2)}$ menunjukkan tingkat kematian yang memungkinkan perubahan mortalita yang bervariasi antar usia secara umum tiap tahunnya, dan $\hat{\kappa}_t^{(3)}$ menunjukkan tingkat kematian yang merepresentasikan dinamika tingkat kematian pada usia yang lebih rendah atau muda secara umum tiap tahunnya. Sedangkan parameter $\hat{\gamma}_{t-x}$ menunjukkan

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

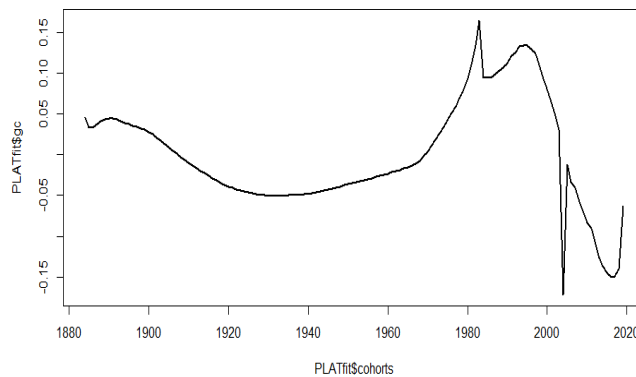
tingkat kematian secara umum berdasarkan *cohort*. Secara keseluruhan nilai dari masing-masing estimasi parameter bisa dilihat pada gambar 3.1 sampai gambar 3.3 berikut



Gambar 3.1. Plot Estimasi Parameter Parameter α_x Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019



Gambar 3.2. Plot Estimasi Parameter Parameter $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$, dan $\kappa_t^{(3)}$ Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019



Gambar 3.3. Plot Estimasi Parameter Parameter γ_{t-x} Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1884-2019

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

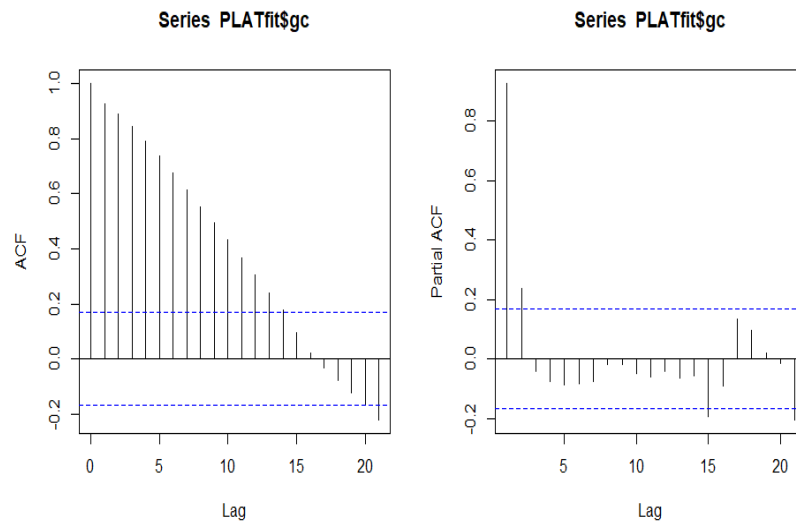
3.2. Peramalan dengan Metode ARIMA

Dengan menggunakan bantuan software R serta hasil estimasi $\hat{\kappa}_t^{(i)}$, maka proses *Multivariate Random Walk with Drift* untuk $\hat{\kappa}_t^{(i)}$ dapat diperoleh nilai koefisien untuk masing-masing drift dengan $\varepsilon_t^\kappa \sim N(0, \Sigma)$ yaitu

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_t^{(1)} &= -0.006850016 + \hat{\kappa}_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t^\kappa \\ \hat{\kappa}_t^{(2)} &= -0.0001435523 + \hat{\kappa}_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^\kappa \\ \hat{\kappa}_t^{(3)} &= -0.0004656609 + \hat{\kappa}_{t-1}^{(3)} + \varepsilon_t^\kappa\end{aligned}$$

Sedangkan untuk proses ARIMA pada estimasi $\hat{\gamma}_{t-x}$

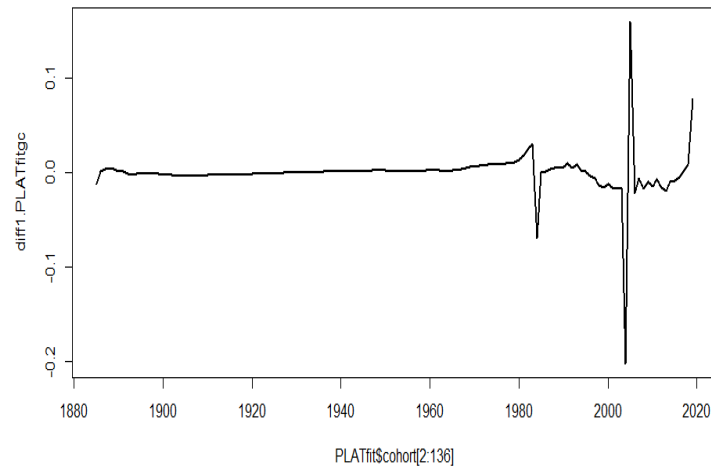
- a. Plot data dan menstasionerkan data



Gambar 3.4. Plot ACF dan PACF pada Nilai $\hat{\gamma}_{t-x}$ Model PLAT pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1884-2019

Berdasarkan plot dari ACF dan PACF pada gambar 3.4, diketahui data belum stationer dalam means sehingga untuk menstationerkannya dilakukan proses *differencing*.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

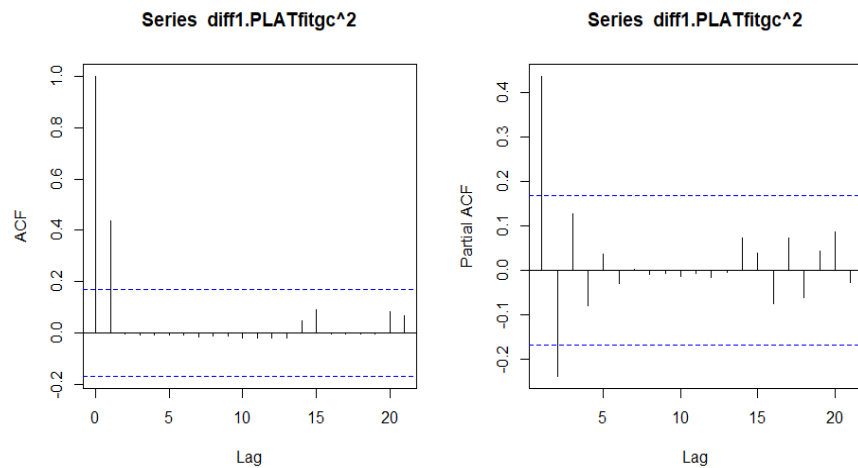


Gambar 3.5. Plot Estimasi Parameter $\hat{\gamma}_{t-x}$ setelah *Differencing* Pertama

Terlihat pada gambar 3.5 dengan proses *differencing* pertama diperoleh data yang sudah stasioner terhadap mean. Untuk lebih memastikan data telah stationer dalam mean dan variansi dapat dilakukan uji ADF. Berdasarkan hasil nilai p-value uji ADF yaitu $0,04469 < 0,05$ dan Box-Ljung yaitu $0,00007 < 0,05$ sehingga dikatakan data sudah stationer dalam mean dan data tidak berkorelasi atau sudah stationer dalam variansi

b. Identifikasi plot ACF dan PACF

Identifikasi plot ACF dan PACF setelah *differencing* diperoleh



Gambar 3.6. Plot ACF dan PACF pada Nilai $\hat{\gamma}_{t-x}$ Model PLAT setelah *Differencing* Pertama pada Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1884-2019

Berdasarkan gambar 3.6 diperoleh lag yang keluar dari garis batas signifikansi plot ACF adalah lag pertama, hal ini menunjukkan adanya proses AR(1). Sedangkan pada plot PACF lag yang keluar garis batas signifikansi adalah lag pertama, hal ini menunjukkan proses MA(1). Karena

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

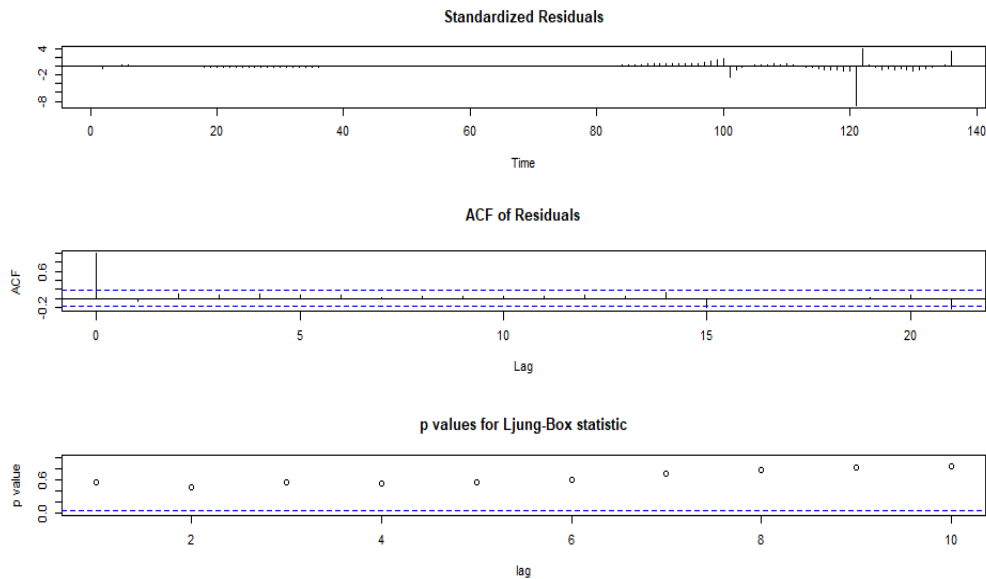
sebelumnya telah dilakukan *differencing* terhadap data sebanyak 1 kali, maka diperoleh model awal untuk peramalan \hat{y}_{t-x} adalah ARIMA(1,1,1)

c. Overfitting model dan analisis residual

Tabel 3.4. *Overfitting* Model ARIMA(1,1,1)

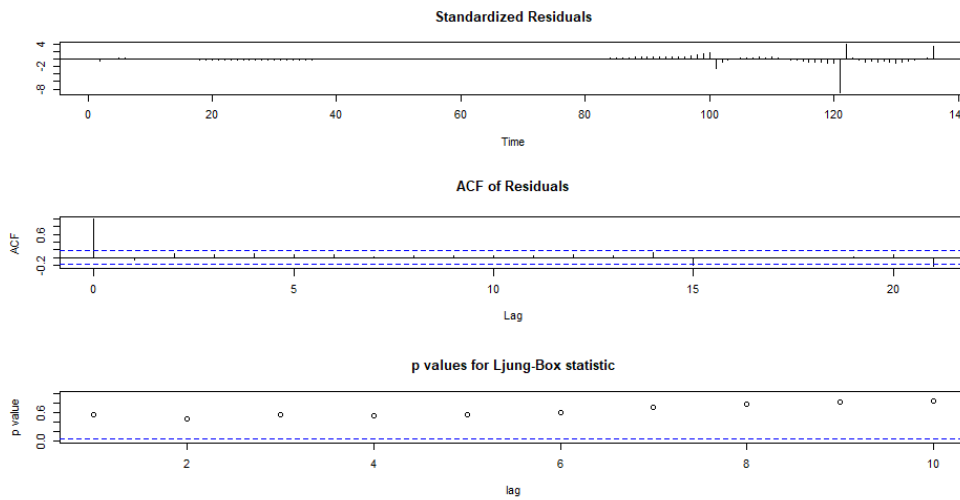
	Drift	AR(1)	MA(1)	Kesimpulan
ARIMA	0.4763	0.1822	0.6043	Tolak
(1,1,1)	-	0.1739	0.6420	Tolak
ARIMA	0.5495	0	-	Tolak
(1,1,0)	-	0	-	Terima
ARIMA	0.4763	-	0	Tolak
(0,1,1)	-	-	0	Terima
ARIMA	0.7167	-	-	Tolak
(0,1,0)	-	-	-	Tolak

Dari tabel uji signifikansi 3.4 terdapat beberapa model ARIMA yang lolos uji signifikansi parameter yaitu ARIMA(1,1,0) tanpa drift dan ARIMA(0,1,1) tanpa drift. Selanjutnya dilakukan analisis residual dari model tersebut diperoleh



Gambar 3.7. Analisis Diagnostic Checking Model ARIMA(1,1,0)

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris



Gambar 3.8. Analisis Diagnostic Checking Model ARIMA(0,1,1)

Berdasarkan gambar 3.7 dan gambar 3.8 kedua model memiliki nilai *p-value* pada uji Ljung-Box di atas garis 5%, tidak ada lag yang keluar pada lag awal, dan plot residual bersifat acak maka perlu dilakukan uji AIC dan BIC untuk menentukan model ARIMA terbaik. Untuk ARIMA(1,1,0) diperoleh nilai AIC sebesar 626,4 dan BIC sebesar 620,73 sedangkan untuk ARIMA(0,1,1) diperoleh nilai AIC sebesar 625,03 dan BIC sebesar 619,22. Sehingga model akhir ARIMA yang digunakan untuk peramalan $\hat{\gamma}_{t-x}$ adalah ARIMA(0,1,1)

d. Peramalan

Model ARIMA(0,1,1) yang dibentuk dari proses sebelumnya adalah sebagai berikut

$$\hat{\gamma}_{t-x} = \hat{\gamma}_{t-x-1} + \varepsilon_t + 0.3256\varepsilon_{t-1}$$

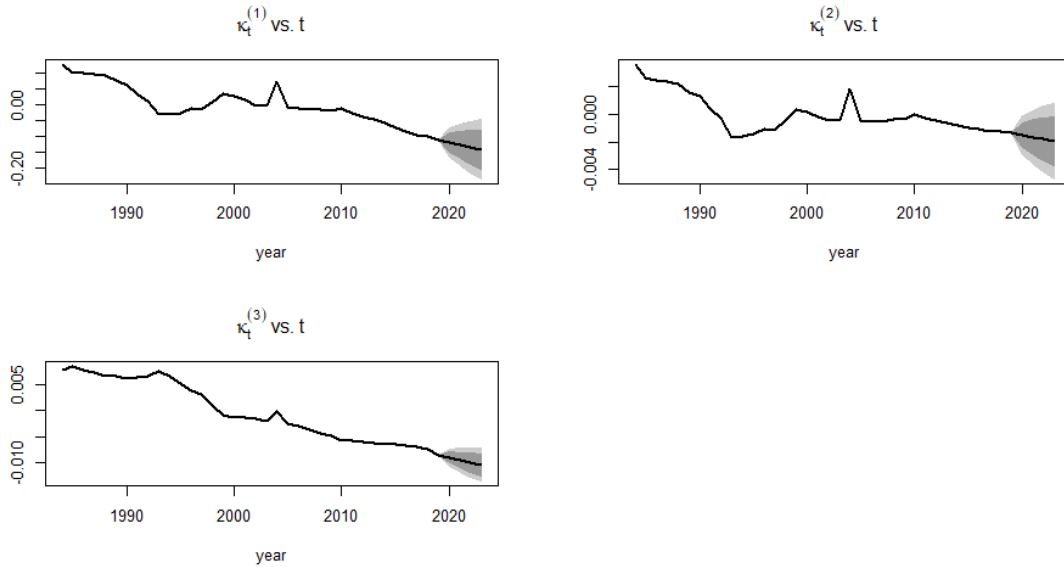
dengan hasil peramalan bisa dilihat pada Tabel 3.5 berikut

Tabel 3.5. Hasil Peramalan Nilai $\hat{\kappa}_t^{(i)}$ dan $\hat{\gamma}_{t-x}$ Selama 4 Tahun ke Depan dari Tahun 2020-2023 pada Data Mortalita Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019

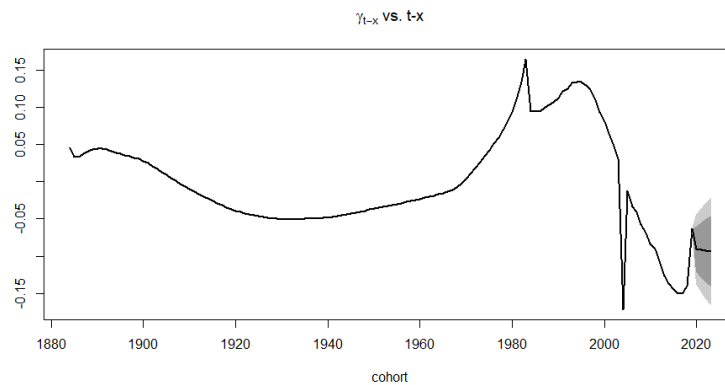
Cohort	$\hat{\gamma}_{t-x}$	Periode	$\hat{\kappa}_t^{(i)}$		
			1	2	3
2020	-0.090724	2020	-0.119852	-0.001509	-0.009031
2021	-0.091701	2021	-0.126702	-0.001653	-0.009497
2022	-0.092679	2022	-0.133552	-0.001796	-0.009962
2023	-0.093657	2023	-0.140402	-0.001940	-0.010428

Untuk hasil jelasnya bisa dilihat pada gambar 3.9 dan gambar 3.10 berikut

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris



Gambar 3.9. Peramalan Parameter $\hat{\kappa}_t^{(i)}$ 4 Tahun ke Depan



Gambar 3.10. Peramalan Parameter $\hat{\gamma}_{t-x}$ 4 Tahun ke Depan

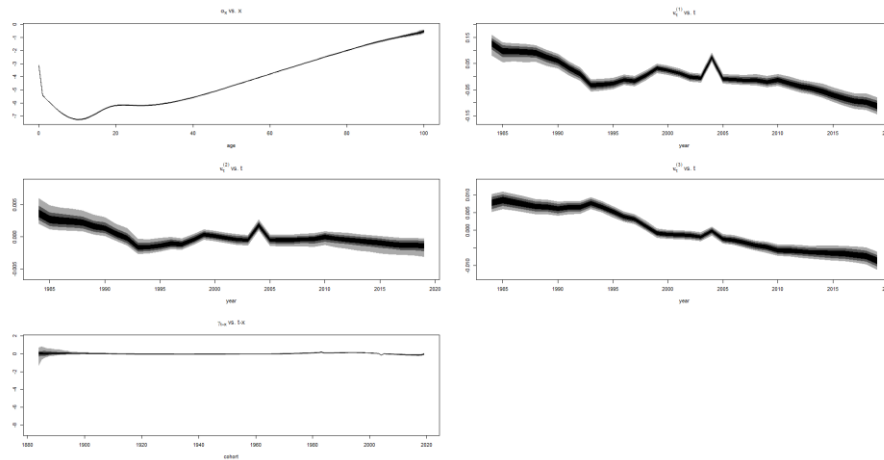
Garis yang terlihat jelas pada plot menunjukkan nilai peramalan pusat sedangkan arsiran pada kiri dan kanannya menunjukkan interval kepercayaan sebesar 80% dan arsiran yang kurang jelas menunjukkan interval kepercayaan sebesar 95%.

3.3. Ketakpastian Parameter dengan *Residual Bootstrap*

Dalam menganalisa nilai mortalitas banyak risiko yang memengaruhi suatu peluang atau nilai dalam mortalita tersebut. Oleh karena itu, suatu metode dan model mortalitas digunakan untuk menganalisis ketakpastian dan menentukan interval peramalannya. Di bawah ini dilakukan estimasi ketakpastian parameter dengan metode *residual bootstrap* untuk 2000 resampel. Perbedaan warna garis pada gambar 3.11 menunjukkan tingkat kepercayaan pada 50%, 80% dan 95%. Bisa dilihat

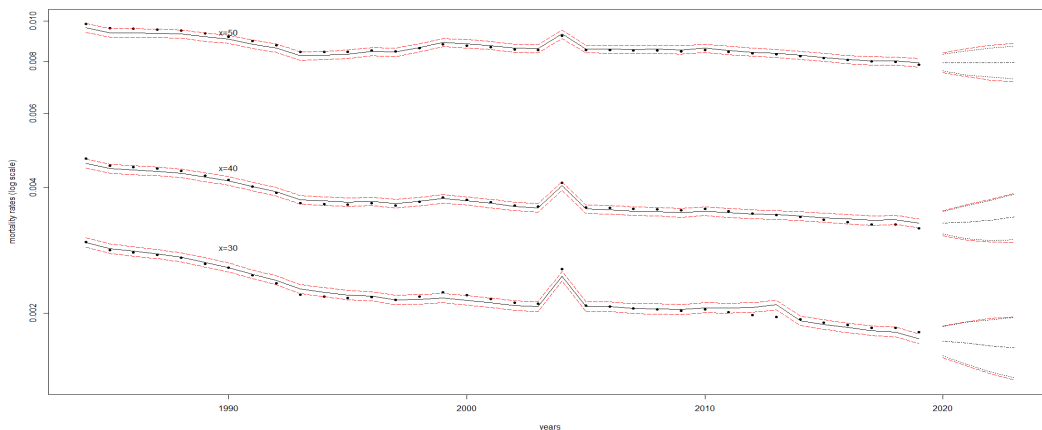
JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

bahwa ketakpastian parameter dari *residual bootstrap* pada parameter α_x sangat sederhana tetapi untuk parameter yang memiliki pergerakan terhadap periode waktu memiliki hasil yang lebih signifikan



Gambar 3.11. *Bootstrapped Parameter* pada Model PLAT untuk Data Mortalita Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019

Setelah melakukan *bootstrapping* pada model mortalitas stokastik selanjutnya bisa diperoleh simulasi masa depan yang menjelaskan *error* peramalan periode dan cohort serta error estimasi parameter. Berikut ditunjukkan plot hasil simulasi mortality rates pada usia 30, 40 dan 50 tahun pada model PLAT dengan metode residual bootstrap dan model ARIMA (0,1,1),



Gambar 3.12. Interval Prediksi 95% untuk Mortality Rates Usia 30, 40, dan 50 Tahun pada Model PLAT untuk Data Mortalita Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 1984-2019

Bisa dilihat pada gambar 3.12 bulatan hitam besar menunjukkan nilai data historik *mortality rates* pada tahun 1984 sampai 2019 dan garis lurus hitam menunjukkan *fitted rates* yang diperoleh dari estimasi model PLAT. Garis titik hitam putus-putus menunjukkan nilai peramalan pusat pada tahun 2020 sampai 2023, garis titik-titik hitam kecil menunjukkan 95% kepercayaan interval tanpa ketakpastian parameter dan garis putus-putus berwarna merah menunjukkan 95% tingkat

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

kepercayaan dan kepercayaan interval dengan ketidakpastian parameter menggunakan metode *residual bootstrap*.

Berdasarkan ketiga grafik untuk masing-masing usia pada gambar 3.12 bisa dilihat bahwa sangat penting untuk menentukan ketidakpastian nilai mortalitas dalam memprediksi interval peramalan mortalitas. Dalam ketiga plot tersebut terlihat lebar interval kepercayaan hasil peramalan menggunakan residual bootstrap lebih besar dari interval tanpa menggunakan metode residual bootstrap terutama untuk usia yang lebih muda. Hal ini sangat berpengaruh apabila dilakukan penelitian terhadap pengaruh tingkat kematian dalam perencanaan pensiun karena diperoleh simulasi interval yang dipengaruhi oleh berbagai macam faktor selama melakukan estimasi.

3.4. Tabel Mortalita Tahun 2023 dari Model Mortalitas Stokastik

Setelah diperoleh estimasi parameter untuk beberapa tahun peramalan, parameter hasil estimasi tersebut dimasukkan kembali ke model melalui persamaan (2.1) dan berdasarkan persamaan (2.6) diperoleh estimasi nilai $\hat{q}_{x,t}$ pada Tabel 3.6 berikut

Tabel 3.6. Nilai Peramalan $\hat{q}_{x,t}$ Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 2020 sampai 2023

Usia	Nilai $\hat{q}_{x,t}$			
	2020	2021	2022	2023
0	0.020490	0.019728	0.018994	0.018287
1	0.002213	0.002074	0.001997	0.001924
2	0.001517	0.001581	0.001483	0.001429
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	0.372754	0.372314	0.371908	0.371537
99	0.391287	0.390823	0.390412	0.390036
100	0.421933	0.421433	0.420990	0.420603

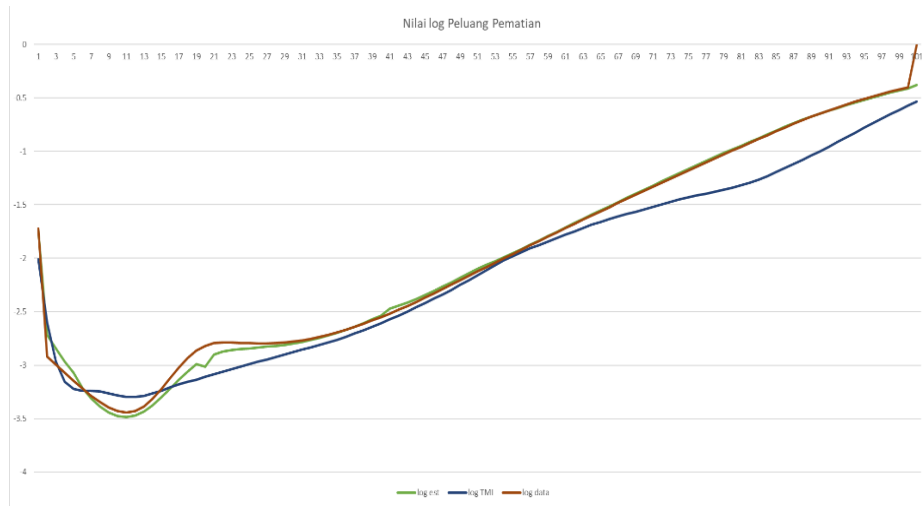
Kemudian akan dibentuk tabel mortalita pada tahun 2023 yang nantinya dibandingkan dengan tabel mortalita Indonesia tahun 2023. Tabel mortalita berdasarkan nilai estimasi tersebut bisa dilihat pada Tabel 3.7 berikut

Tabel 3.7. Tabel Mortalitas Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 2023 Berdasarkan Hasil Peramalan dari Estiamsi Nilai Mortalita Model PLAT

Usia	p_x	l_x	L_x	T_x	e_x	$S(x)$
0	0.981713	1,000,000	987,199	68,898,550	68.90	1.000000
1	0.998076	981,713	980,580	67,911,351	69.18	0.981713
2	0.998571	979,824	979,124	66,930,771	68.31	0.979824
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	0.628463	2,612	2,127	3,948	1.51	0.002612
99	0.609964	1,641	1,321	1,822	1.11	0.001641
100	0.579397	1,001	501	501	0.50	0.001001

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

Dari hasil tersebut akan dibandingkan nilai estimasi mortalitas $\log(q_x)$ pada tahun 2023 dengan nilai mortalitas $\log(q_x)$ pada data di *World Population Prospects* untuk tahun 2023 dan Tabel Mortalitas Indonesia Tahun 2023



Gambar 3.13. Perbandingan nilai estimasi mortalitas dari estimasi, data di *World Population Prospects*, dan Tabel Mortalitas Indonesia Tahun 2023

Bisa dilihat pada gambar 3.13 perbandingan nilai mortalitas dari ketiga tabel mortalita tidak memiliki perbedaan yang begitu jauh.

3.5. Pembahasan

Dari hasil estimasi yang diperoleh menggunakan data mortalita penduduk Indonesia pada model mortalitas stokastik PLAT bisa dilihat bahwa model ini juga memiliki kelebihan dalam bidang demografi dan aktuaria jika dibandingkan dengan model stokastik Lee-Carter pada penelitian Norkhairunnisa Redzwan [11] yaitu terdapat parameter-parameter yang lebih lengkap untuk melihat efek tingkat kematian berdasarkan berbagai macam kriteria. Hasil ini sesuai dengan penelitian dari Stefan Tappe [17] yang menyebutkan bahwa proyeksi demografis dari tingkat kematian masa depan melibatkan tingkat ketidakpastian yang tinggi dan membutuhkan model mortalitas stokastik sehingga bisa digunakan sebagai alternatif pembentukan tabel mortalitas di Indonesia yang sampai saat ini masih menggunakan model mortalitas statik berdasarkan estimasi tabel mortalita 2023 Indonesia dari BPJS Kesehatan [3].

Selain itu berdasarkan hasil peramalan menggunakan metode *Multivariate Random Walk with Drift* dan ARIMA diperoleh hasil bahwa tabel mortalita hasil peramalan yaitu pada tahun 2023 memiliki hasil yang tidak begitu jauh dengan tabel mortalita statik yang dipakai di Indonesia saat ini yaitu tahun 2023 dari BPJS Kesehatan. Berdasarkan hasil tersebut model mortalitas stokastik PLAT bisa digunakan untuk memprediksi dan membuat tabel mortalita pada tahun-tahun ke depan secara lebih efisien. Hasil tersebut sesuai dengan peneliti Lovász [9] yang menyatakan bahwa ARIMA sangat sesuai dengan ciri model mortalitas stokastik yang konsisten dengan data historik.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

Melalui metode *residual bootstrap* bisa ditunjukkan prediksi interval peramalan mortalitas dengan memperhatikan *error* peramalan periode dan cohort dari model ARIMA serta error estimasi parameter dari Model mortalitas stokastik. Hal ini memperkuat klaim dari penelitian Salvatore Scognamiglio [16] yang mengatakan bahwa banyak model mortalitas stokastik yang sulit untuk dianalisis sehingga ketidakpastian parameter biasanya dianalisis menggunakan prosedur bootstrap dan diperkuat hasil penelitian Eric Beutner [1] yang membuktikan konsistensi bootstrap untuk kelas umum dari model volatilitas dan interval.

4. KESIMPULAN

Peramalan menggunakan proses *Multivariate Random Walk with Drift* dan ARIMA, menghasilkan nilai tingkat kematian yang mendekati data historis. Selanjutnya, penerapan metode *residual bootstrap* dalam menunjukkan simulasi dari peramalan tingkat kematian yang dipengaruhi oleh ketidakpastian parameter menunjukkan perbedaan interval konfidensi jika dibandingkan dengan tanpa ketidakpastian parameter. Hal ini menunjukkan pentingnya pengaruh sampel dan *residual* atau *error* dari estimasi parameter untuk mensimulasikan peramalan tingkat kematian dalam sampel yang kecil dan usia yang tidak terlalu tua.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Beutner E, Heinemann A, Smeekes S. 2024. *A residual bootstrap for conditional Value-at-Risk*. Journal of Econometrics. 2024 Jan 1;238(2):105554–4.
- [2] Bowers N.L, Gerber H.U, Hickman J.C, Jones D.A, Nesbitt C.J. 1997. *Actuarial Mathematics*, 2nd ed. Schaumburg (Illinois): The Society Of Actuaries.
- [3] BPJS Kesehatan. 2023. *Tabel Mortalitas dan Morbiditas Penduduk Indonesia 2023*. Jakarta
- [4] Coughlan, G., Epstein, D., Ong, A., Sinha, A., Hevia-Portocarrero, J., Gingrich, E., Khalaf-Allah, M., and Joseph, P. 2007. *Lifemetrics: A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risks*. Technical report, JP Morgan: Pension Advisory Group.
- [5] Currie ID. 2016. *On Fitting Generalized Linear and non-linear Models of Mortality*. Scandinavian Actuarial Journal, (4), 356–383
- [6] Dickson D.C.M, Mary Rosalyn Hardy, Waters H.R. 2020. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*, 3rd ed. Cambridge, United Kingdom Cambridge University Press.
- [7] Haberman, S., & Renshaw, A. 2011. *A comparative study of parametric mortality projection models*. Insurance: Mathematics and Economics, 48(1), 35–55.
- [8] London, R. L., Duncan, I. G., Camilli, S. J., & Cunningham, R. J. 2014. *Models for Quantifying Risk*, 6th ed. Actex Publications.
- [9] Lovász, E. 2011. *Analysis of Finnish and Swedish Mortality Data with Stochastic Mortality Models*. European Actuarial Journal, 1(2) pp. 259-289.
- [10] Macdonald A.S, Richards S.J, Currie I.D, Institute And Faculty Of Actuaries. 2018. *Modelling Mortality with Actuarial Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] Norkhairunnisa Redzwan, Rozita Ramli, Pavitra Sivasundaram. 2023. *Mortality Index Simulation for Forecasting Malaysian Mortality Rates*. ASM Science Journal. 2023 Nov 16;18:1–11.
- [12] Plat R. 2009. *On Stochastic Mortality Modeling*. SSRN Electronic Journal.
- [13] R Core Team. 2024. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL: <https://www.rproject.org/>
- [14] Rashid, M. 2008. *Inference on Logistic Regression model*. Dissertation. United States, Bowling Green State University.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Fery Widhiatmoko, Danardono, Mila Kurniawaty, Amanda Nadhifa Maydika,
Thessalonika Sandra Devina Nishi, Chasib Idris

- [15] Sahinler S., and Topuz, D. 2007. *Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithm for Estimation of Regresion Parameter*. Turkey : Journal of Appliaed Quantitative method, Vol 2 No 2 pp. 188 -199
- [16] Scognamiglio S, Marino M. 2022. *Backtesting stochastic mortality models by prediction interval-based metrics*. Quality & Quantity. 2022 Sep 29;
- [17] Tappe S, Weber S. 2019. *Stochastic mortality models: An infinite dimensional approach*. arXiv (Cornell University). 2019 Jul 11.