

## The Second Mean Value Theorem for Integrals with Weighted Functions

### Teorema Nilai Rata-Rata Kedua untuk Integral dengan Fungsi Berbobot

Kasmila Ulansari<sup>1</sup>, Faihatuz Zuhairoh<sup>\*2</sup>

<sup>1,2</sup>Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP YPUP Makassar, Indonesia

Email: <sup>1</sup>kasmilaulansarii@gmail.com, <sup>2</sup>fzuhairoh@stkip.ypup.ac.id

<sup>\*</sup>Corresponding author

Received: 5 February 2025, revised: 2 March 2025, accepted: 11 March 2025

#### Abstract

This article discusses the Second Mean Value Theorem for integrals by presenting a comprehensive mathematical proof using a deductive-mathematical approach that involves the Extreme Value Theorem and the Comparison Theorem. Given a continuous function  $f(x)$  and a function  $g(x)$  that is integrable in the Riemann sense over the interval  $[a, b]$ , it is proven that there exists at least one point  $c \in [a, b]$  such that:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

This article also examines cases where  $g(x)$  changes sign within the integration interval, considering the properties of weighted integrals. Furthermore, various applications of the theorem are provided, including numerical computations using the Newton-Raphson method to determine the value of  $c$  in certain cases. Additional case studies link this theorem to modeling in probability, economics, and engineering, thereby demonstrating its relevance in data analysis and dynamic systems. The results of this study not only enrich the theoretical foundation of integral analysis but also offer practical contributions to problem solving in various disciplines.

**Keywords:** Second mean value theorem, Riemann integral, continuous function, theorem applications.

#### Abstrak

Artikel ini membahas Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral dengan menyajikan pembuktian matematis secara komprehensif menggunakan pendekatan deduktif-matematis yang melibatkan teorema nilai ekstrim dan teorema perbandingan integral. Diberikan fungsi  $f(x)$  yang kontinu dan



fungsi  $g(x)$  yang terintegralkan dalam pengertian Riemann pada interval  $[a, b]$ , dibuktikan bahwa terdapat setidaknya satu titik  $c \in [a, b]$  sedemikian sehingga:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Artikel ini juga menyajikan kasus di mana  $g(x)$  berubah tanda dalam interval integrasi, dengan mempertimbangkan sifat integral berbobot. Selain itu, berbagai contoh penerapan teorema disajikan, termasuk perhitungan numerik dengan metode Newton-Raphson untuk menentukan nilai  $c$  pada kasus tertentu. Studi kasus lebih lanjut menghubungkan teorema ini dengan pemodelan dalam probabilitas, ekonomi, dan teknik, sehingga menunjukkan relevansi teorema dalam analisis data dan sistem dinamis. Hasil penelitian ini tidak hanya memperkaya landasan teoretis dalam analisis integral, tetapi juga memberikan kontribusi praktis dalam penyelesaian masalah di berbagai disiplin ilmu.

**Kata kunci :** teorema nilai rata-rata kedua, integral Riemann, fungsi kontinu, aplikasi teorema.

## 1. PENDAHULUAN

Integral merupakan konsep fundamental dalam kalkulus yang tidak hanya berperan penting dalam analisis matematis, tetapi juga memiliki aplikasi yang luas di berbagai disiplin ilmu seperti fisika, ekonomi, dan teknik. Secara umum, integral digunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva dan total akumulasi suatu variabel dalam sistem dinamis. Konsep ini memiliki akar historis yang mendalam, di mana istilah "integral" berasal dari bahasa Latin *integer* yang berarti "utuh" atau "lengkap", yang mencerminkan esensi penyatuan elemen-elemen kecil menjadi suatu kesatuan [2].

Dalam kalkulus integral, Teorema Nilai Rata-Rata (TNR) memiliki peran penting dalam menghubungkan nilai integral suatu fungsi dengan nilai fungsi itu sendiri pada suatu titik dalam interval tertentu. Secara umum, Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral menyatakan bahwa untuk suatu fungsi kontinu  $f(x)$  pada interval tertutup  $[a, b]$ , terdapat setidaknya satu titik  $c \in [a, b]$  yang memenuhi persamaan berikut [15].

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a). \quad (1.1)$$

Teorema ini memberikan wawasan bahwa nilai rata-rata suatu fungsi pada interval tertentu dapat direpresentasikan sebagai nilai fungsi itu sendiri di suatu titik dalam interval tersebut.

Artikel ini berfokus pada Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral, yang merupakan bentuk generalisasi dari teorema sebelumnya. Teorema ini menyatakan bahwa jika  $f(x)$  adalah fungsi kontinu dan  $g(x)$  adalah fungsi yang dapat diintegralkan serta tidak berubah tanda pada interval  $[a, b]$ , maka terdapat setidaknya satu titik  $c \in [a, b]$  yang memenuhi persamaan [5], [7], [9].

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (1.2)$$

Teorema ini menunjukkan bahwa integral berbobot suatu fungsi dapat direpresentasikan sebagai nilai fungsi pada suatu titik tertentu dalam interval tersebut, dikalikan dengan integral bobotnya. Dengan kata lain, teorema ini memberikan hubungan antara sifat global dari integral suatu fungsi dan nilai lokal fungsi itu sendiri di titik tertentu dalam interval.

Dalam beberapa dekade terakhir, Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral telah menjadi topik penelitian yang menarik dalam kalkulus, terutama terkait dengan generalisasinya ke integral pecahan. Beberapa penelitian telah menunjukkan bahwa teorema ini dapat diterapkan dalam berbagai bidang, seperti Abdo dkk. [1] dan Butt dkk. [4] yang menerapkan teorema ini dalam analisis sistem dinamis non-linear, Fernandez dan Baleanu [6] dalam pengembangan operator diferensial pecahan dengan kernel non-singular, serta Lozada-Cruz [8] mengaplikasi dalam bidang fisika,

ekonomi, dan teknik. Selain itu, teorema ini juga dapat diterapkan dalam konteks teori probabilitas dan statistik, seperti dalam perhitungan ekspektasi berbobot pada distribusi probabilitas tertentu.

Selain itu, Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral juga dapat diaplikasikan pada fungsi zeta oleh Toma [12] dan fungsi renewal dua dimensi oleh Sasongko dan Susanto [10]. Solusi numerik dari Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral dalam bidang geografi juga dijelaskan oleh Zhang dkk. [16] dan estimasi titik maksimum oleh Tirado-Serrato [11].

Artikel ini bertujuan untuk membuktikan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral secara komprehensif serta menyoroti aplikasinya dalam berbagai konteks modern. Dengan menyajikan pembuktian yang menggunakan pendekatan deduktif-matematis serta contoh-contoh perhitungan numerik, artikel ini berusaha memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang perilaku fungsi dalam sistem integral berbobot. Selain itu, disajikan pula studi kasus yang mengaitkan teorema ini dengan pemodelan dalam bidang probabilitas, ekonomi, dan teknik. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian analisis integral serta memberikan kontribusi praktis dalam penyelesaian berbagai masalah yang melibatkan integral berbobot dan akumulasi nilai dalam sistem dinamis.

## **2. METODE PENELITIAN**

Penelitian ini merupakan kajian teoretis dalam bidang matematika yang berfokus pada pembuktian dan aplikasi Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral. Metode yang digunakan adalah penelitian kepustakaan dengan pendekatan deduktif-matematis, yang bertujuan untuk membuktikan teorema secara formal serta mengeksplorasi penerapannya dalam berbagai konteks matematis dan numerik.

Metode penelitian ini terdiri dari dua tahap utama:

### **1) Tahap Pembuktian Teorema**

- a. Menuliskan ulang Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral sebagai dasar teori.
- b. Membuktikan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral menggunakan Teorema Nilai Ekstrem dan Teorema Perbandingan untuk Integral.
- c. Mengkaji asumsi-asumsi yang digunakan dalam pembuktian, seperti kontinuitas fungsi  $f(x)$  dan sifat integral  $g(x)$  yang tidak berubah tanda.

### **2) Tahap Verifikasi dan Ilustrasi**

- a. Menyusun contoh konkret untuk mengilustrasikan penerapan teorema dalam berbagai jenis fungsi.
- b. Menganalisis solusi numerik menggunakan Metode Newton-Raphson untuk menentukan nilai  $c$  dalam persamaan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral.
- c. Membahas aplikasi teorema dalam konteks probabilitas, ekonomi, dan teknik, termasuk penerapannya dalam perhitungan ekspektasi berbobot dan model harga rumah berbasis distribusi probabilitas.

Hasil dari penelitian ini berupa pembuktian matematis yang sistematis serta contoh penerapan numerik dan analitis yang dapat memperjelas pemahaman tentang Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral. Selain itu, pendekatan numerik seperti metode Newton-Raphson digunakan untuk mendukung validasi solusi pada kasus tertentu, terutama dalam skenario di mana penyelesaian analitis sulit diperoleh.

## **3. HASIL DAN PEMBAHASAN**

Sebelum membahas Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral, diperlukan pemahaman terhadap beberapa konsep fundamental dalam analisis integral:

### **1. Kontinuitas Fungsi**

Fungsi  $f(x)$  dikatakan kontinu pada interval  $[a, b]$  jika:

- $f(x)$  terdefinisi untuk setiap  $x \in [a, b]$ .
  - $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  ada untuk setiap  $c \in [a, b]$ .
  - $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  untuk setiap  $c \in [a, b]$ .
2. Integrabilitas Fungsi  
Fungsi  $g(x)$  dikatakan dapat terintegralkan pada  $[a, b]$  jika:
- $g(x)$  terbatas pada interval  $[a, b]$ .
  - Jumlah Riemann memiliki limit untuk partisi yang semakin halus.
3. Teorema Nilai Ekstrem  
Jika fungsi kontinu pada interval tertutup  $[a, b]$ , maka fungsi tersebut mencapai nilai maksimum dan minimum pada interval tersebut.

**Teorema 3.1. (Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral)**

Jika  $f(x)$  merupakan fungsi kontinu pada interval tertutup  $[a, b]$ , maka terdapat setidaknya satu titik  $c \in [a, b]$  sehingga [13],

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1)$$

Teorema ini menyatakan bahwa nilai rata-rata suatu fungsi pada interval tertentu dapat direpresentasikan sebagai nilai fungsi itu sendiri pada titik tertentu dalam interval tersebut.

**Bukti**

1. Keberlanjutan fungsi  $f(x)$ :  
Karena  $f(x)$  kontinu pada interval  $[a, b]$ , maka  $f(x)$  terintegrasi secara Riemann pada  $[a, b]$ . Berdasarkan Teorema Integrabilitas Riemann [3] jika suatu fungsi kontinu pada interval tertutup, maka fungsi tersebut dapat diintegrasikan dalam pengertian Riemann pada interval tersebut, sehingga integral  $\int_a^b f(x) dx$  terdefinisi dan bernilai *real*.
2. Aplikasi teorema nilai ekstrem:  
Berdasarkan teorema nilai ekstrem, fungsi kontinu  $f(x)$  pada interval tertutup  $[a, b]$  mencapai nilai minimum  $m$  dan nilai maksimum  $M$  di dalam  $[a, b]$ . Maka untuk setiap  $x \in [a, b]$ , berlaku  $m \leq f(x) \leq M$ .
3. Teorema perbandingan untuk integral:
  - a. Dengan sifat monoton fungsi pada interval, integrasi atas ketidaksamaan  $m \leq f(x) \leq M$  memberikan:
 
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$
  - b. Membagi kedua ruas dengan  $b-a$  diperoleh:
 
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$
  - c. Hasil ini menunjukkan bahwa rata-rata integral  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  adalah suatu angka dalam interval  $[m, M]$ .
4. Aplikasi teorema nilai perantara:
  - a. Berdasarkan teorema nilai perantara, karena  $f(x)$  kontinu pada  $[a, b]$ , maka  $f(x)$  mengambil semua nilai antara  $m$  dan  $M$ .
  - b. Oleh karena itu, nilai rata-rata  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  dapat dicapai oleh  $f(x)$  di suatu titik  $c \in [a, b]$ . Dengan kata lain, terdapat  $c \in [a, b]$  sedemikian sehingga:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \blacksquare$$

**Teorema 3.2. (Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral)**

Misalkan  $f(x)$  kontinu dan  $g(x)$  dapat diintegrasikan pada interval  $[a, b]$ . Jika  $g(x) \geq 0$  (atau  $g(x) \leq 0$ ) pada interval  $[a, b]$ , maka terdapat titik  $c$ ,  $a \leq c \leq b$ , sedemikian sehingga [14],

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx \quad (3.2)$$

**Bukti:**

## 1. Asumsi awal:

Dari Teorema 3.1, karena  $f(x)$  kontinu pada  $[a, b]$ , maka untuk setiap  $x \in [a, b]$ , berlaku  $m \leq f(x) \leq M$ .

2. Asumsi awal dari Teorema 3.1 Hubungan dengan  $g(x)$ :

a. Misalkan  $g(x) \geq 0$  pada  $[a, b]$ .

b. Karena  $g(x) \geq 0$ , maka integral  $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ .

## 3. Ketidaksamaan integral:

a. Berdasarkan sifat integral dan ketidaksamaan  $m \leq f(x) \leq M$ , kita dapat menuliskan:

$$m \int_a^b g(x)dx = \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

b. Jika  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , maka kedua sisi ketidaksamaan menjadi nol, sehingga:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Dalam hal ini, kita dapat memilih sembarang  $c \in [a, b]$ , karena persamaan selalu terpenuhi.

4. Kasus  $\int_a^b g(x)dx > 0$ :

a. Jika  $\int_a^b g(x)dx > 0$ , maka kita dapat membagi kedua sisi ketidaksamaan dengan  $\int_a^b g(x)dx$ :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

b. Berdasarkan teorema nilai tengah untuk integral, terdapat  $c \in [a, b]$  sedemikian sehingga:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

c. Dengan substitusi ini, kita mendapatkan:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

5. Kasus  $g(x) \leq 0$ :

Jika  $g(x) \leq 0$  untuk setiap  $x \in [a, b]$ , maka argumen serupa berlaku. Integral  $\int_a^b g(x)dx \leq 0$ , dan kita tetap memperoleh  $f(c)$  di antara nilai minimum dan maksimum  $f(x)$  pada interval  $[a, b]$ .

Jadi, dalam semua kasus ( $g(x) > 0$ ,  $g(x) < 0$ , atau  $\int_a^b g(x)dx = 0$ ), terdapat  $c \in [a, b]$  sedemikian sehingga:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad \blacksquare$$

Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral memiliki beberapa interpretasi penting dalam kalkulus dan analisis *real*:

## a. Interpretasi Geometris

Persamaan  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$  menunjukkan bahwa total luas di bawah kurva  $f(x)g(x)$  sama dengan luas suatu persegi panjang dengan tinggi  $f(c)$  dan lebar  $\int_a^b g(x)dx$ .

b. Hubungan dengan Rata-Rata Integral

Jika  $g(x) = 1$ , maka teorema ini kembali menjadi Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral.

c. Signifikansi dalam Sistem Dinamis

Dalam pemodelan fisika dan ekonomi, sering kali digunakan fungsi berbobot yang menunjukkan pengaruh faktor eksternal terhadap sistem integral.

Pengembangan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral menjadi fungsi berbobot non-monotonik dilakukan untuk mengatasi keterbatasan dalam bentuk klasiknya. Dalam bentuk aslinya, teorema ini hanya berlaku untuk fungsi berbobot yang tidak berubah tanda dalam interval integrasi. Namun, dalam banyak fenomena nyata seperti distribusi ekonomi, perpindahan panas, dan analisis probabilitas, fungsi berbobot sering kali mengalami perubahan tanda. Oleh karena itu, perlu dilakukan generalisasi yang memperhitungkan kontribusi dari area dengan bobot positif maupun negatif agar hasil integral tetap representatif. Dengan menambahkan faktor koreksi  $\varepsilon$ , teorema ini tetap dapat diterapkan secara lebih luas tanpa kehilangan keabsahan matematisnya.

Hasil dari generalisasi Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral dengan fungsi berbobot non-monotonik menunjukkan bahwa meskipun  $g(x)$  berubah tanda dalam interval integrasi, masih terdapat titik  $c$  yang memenuhi hubungan integral dengan koreksi tambahan  $\varepsilon$ . Keberadaan faktor koreksi ini mengindikasikan bahwa perubahan tanda pada fungsi berbobot berkontribusi pada perbedaan antara integral sesungguhnya dengan hasil perkiraan dari teorema klasik.

Secara umum, teorema ini tetap berlaku ketika fungsi berbobot  $g(x)$  memiliki perubahan tanda yang halus dan kontinu. Dalam kasus seperti fungsi sinus yang berosilasi secara bertahap, faktor koreksi  $\varepsilon$  relatif kecil dan tidak mengubah hasil secara signifikan. Selain itu, teorema ini tetap valid jika integral  $\int_a^b g(x)dx$  tidak mendekati nol, karena jika nilai ini terlalu kecil, maka pembagian dalam perhitungan  $c$  dapat menghasilkan hasil yang tidak terdefinisi atau sangat besar. Koreksi  $\varepsilon$  juga harus berada dalam rentang tertentu agar tidak menyebabkan nilai  $c$  keluar dari domain *real*.

Namun, ada kondisi tertentu di mana teorema ini dapat menjadi tidak berlaku. Jika fungsi  $g(x)$  memiliki banyak titik nol sehingga  $\int_a^b g(x)dx \approx 0$ , maka perhitungan  $c$  bisa menjadi tidak terdefinisi atau sangat besar. Hal ini sering terjadi pada fungsi osilasi tinggi seperti  $g(x) = \sin(100x)$  dalam interval pendek. Selain itu, jika  $I - \varepsilon < 0$ , maka akar kuadrat dalam perhitungan  $c$  akan menghasilkan nilai yang tidak terdefinisi dalam bilangan *real*. Oleh karena itu, ada batas maksimum untuk nilai  $\varepsilon$  agar koreksi ini tidak menyebabkan kesalahan dalam perhitungan.

Selain itu, teorema ini juga dapat menjadi tidak valid jika  $g(x)$  memiliki diskontinuitas tajam atau perubahan mendadak. Jika  $g(x)$  merupakan fungsi diskrit atau memiliki lonjakan tiba-tiba, hasil integral mungkin tidak konvergen dengan baik, sehingga nilai  $c$  yang diperoleh mungkin tidak memiliki makna yang sesuai dalam konteks aplikasi.

Untuk memastikan validitas teorema ini dalam berbagai kondisi, perlu ditambahkan beberapa batasan. Pertama, harus dipastikan bahwa  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$  agar tidak terjadi pembagian oleh nol. Kedua, harus ada batas maksimum untuk  $\varepsilon$  agar  $I - \varepsilon \geq 0$  sehingga akar kuadrat tetap valid dalam bilangan *real*. Ketiga, fungsi  $g(x)$  sebaiknya cukup halus dan tidak memiliki diskontinuitas ekstrem yang dapat mengganggu stabilitas hasil integral. Sehingga teorema hasil generalisasi dapat dituliskan secara lengkap sebagai berikut.

**Teorema 3.3. (Generalisasi Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral dengan Fungsi Berbobot Non-Monotonik)**

Misalkan  $f(x)$  adalah fungsi kontinu pada interval  $[a, b]$  dan  $g(x)$  adalah fungsi yang terintegralkan tetapi dapat berubah tanda dalam interval tersebut. Jika  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ , maka terdapat setidaknya satu titik  $c \in (a, b)$ , sedemikian sehingga,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx + \varepsilon, \quad (3.3)$$

dengan  $\varepsilon$  adalah faktor koreksi yang tergantung pada perubahan tanda dari  $g(x)$ . Agar teorema tetap valid, batas maksimum  $\varepsilon$  harus memenuhi  $1 - \varepsilon \geq 0$  agar akar kuadrat dalam perhitungan  $c$  tetap dalam domain bilangan *real*.

#### Bukti:

1. Kasus standar ( $g(x)$  tidak berubah tanda):

Jika  $g(x)$  tidak berubah tanda, maka  $\varepsilon = 0$ , sehingga teorema kembali ke bentuk klasiknya.

2. Kasus  $g(x)$  berubah tanda:

- a. Misalkan  $g(x)$  memiliki titik-titik nol di  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dalam  $[a, b]$ .
- b. Interval  $[a, b]$  dapat dibagi menjadi subinterval  $[x_i, x_{i+1}]$  di mana  $g(x)$  tetap bertanda positif atau negatif.
- c. Dengan menerapkan Teorema Nilai Rata-rata Kedua pada setiap subinterval  $[x_i, x_{i+1}]$ , diperoleh nilai  $c_i$  untuk setiap bagian dengan

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx = f(c_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx.$$

- d. Menjumlahkan semua subinterval, diperoleh

$$\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx = \sum_i f(c_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx + \varepsilon$$

- e. Faktor koreksi  $\varepsilon$  dapat diperkirakan sebagai

$$\varepsilon = \sum_i R_i,$$

dengan  $R_i$  adalah residu yang muncul dari osilasi  $g(x)$  di sekitar titik-titik nolnya.

- f. Jika  $g(x)$  cukup halus di sekitar titik nol, maka  $\varepsilon$  akan mendekati nol untuk fungsi tertentu, tetapi dapat signifikan dalam kasus lainnya.

## 4. ILUSTRASI DAN PENERAPAN TEOREMA

Bagian ini menyajikan berbagai contoh penerapan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral dalam bentuk ilustrasi numerik dan analisis geometris. Untuk memastikan pemahaman yang komprehensif, bagian ini membahas contoh numerik sederhana yang menunjukkan bagaimana menentukan titik  $c$ , pendekatan numerik dengan metode Newton-Raphson untuk menyelesaikan persamaan yang tidak dapat diselesaikan secara analitis, dan interpretasi geometris yang menjelaskan bagaimana teorema ini menggambarkan hubungan antara integral berbobot dan nilai fungsi di suatu titik. Untuk mengilustrasikan teorema, dimulai dengan fungsi sederhana.

### Contoh 4.1. (Fungsi Polinomial Orde Tiga)

Diberikan fungsi  $f(x) = 5x + x^3$  pada interval  $[0, 4]$ . Tentukan nilai  $c$  yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral.

#### Langkah Penyelesaian:

Menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral pada persamaan (3.1), selanjutnya mensubstitusi batas-batas integral dan fungsi  $f(x)$  pada teorema tersebut.

$$\begin{aligned}
 f(c) &= \frac{1}{4-0} \int_0^4 5x + x^3 dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{5x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_0^4 \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{5(4)^2}{2} + \frac{4^4}{4} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{5(4)^2}{2} + \frac{4^4}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (40 + 64) \\
 &= \frac{1}{4} (104) \\
 &= 26
 \end{aligned}$$

Jadi, nilai  $f(c) = 26$ . Selanjutnya, mencari nilai  $c$  dengan  $f(c) = 26$ .

Diketahui bahwa  $f(x) = 5x + x^3$ , maka  $f(c) = 5c + c^3 = 26$  atau bisa ditulis dengan  $c^3 + 5c - 26 = 0$ .

Untuk mencari nilai  $c$ , dapat menggunakan metode Newton-Raphson dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- a. Mencari turunan pertama dari fungsi  $f(c)$

$$f(c) = c^3 + 5c - 26$$

$$f'(c) = 3c^2 + 5$$

- b. Formula metode Newton-Raphson

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$$

- c. Menentukan tebakan awal  $c_0$ .

Mulai dengan tebakan awal  $c_0 = 2$  (karena akar ada di sekitar  $2 < c < 3$ ).

Iterasi 1:

$$c_1 = c_0 - \frac{f(c_0)}{f'(c_0)}$$

$$f(2) = (2)^3 + 5(2) - 26 = 8 + 10 - 26 = -8$$

$$f'(2) = 3(2)^2 + 5 = 12 + 5 = 17$$

$$\text{Sehingga diperoleh } c_1 = 2 - \frac{-8}{17} = \frac{34+8}{17} = \frac{42}{17} \approx 2,4706$$

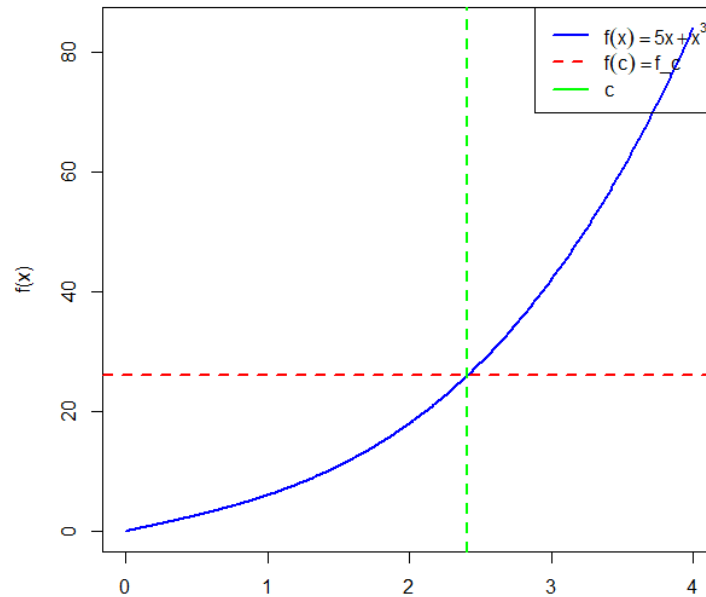
- d. Melakukan iterasi hingga  $|f(c)|$  cukup kecil.

Iterasi 2, 3 dan seterusnya dilakukan seperti pada langkah sebelumnya, di mana hasilnya diberikan pada Tabel 4.1.

**Tabel 4.1.** Hasil Iterasi Metode Newton-Raphson

| Iterasi ke- | $c$           | $f(c)$  | $f'(c)$ |
|-------------|---------------|---------|---------|
| 1           | 2,0000        | -8,0000 | 17,0000 |
| 2           | 2,4706        | 1,4329  | 23,3114 |
| 3           | 2,4091        | 0,0278  | 22,4116 |
| 4           | <b>2,4079</b> | 0,0000  | 22,3937 |

Karena  $c$  berada pada interval  $[0,4]$ , dari hasil iterasi menggunakan metode Newton-Raphsonn diperoleh nilai  $c \approx 2,4079$  dengan toleransi  $10^{-3}$ .



**Gambar 4.1.** Grafik fungsi  $f(x) = 5x + x^3$  pada interval  $[0, 4]$ .

Gambar 4.1 menyajikan representasi grafis dari fungsi  $f(x) = 5x + x^3$  pada interval  $[0, 4]$ . Akar yang dihitung adalah  $c \approx 2,4079$  yang diperoleh menggunakan metode Newton-Raphson dengan toleransi  $10^{-3}$ . Visualisasi ini menggambarkan konvergensi metode iteratif menuju akar. Skrip R yang digunakan untuk menghitung  $c$  disediakan untuk memastikan reproduisibilitas.

```
# Fungsi f(x) = 5x + x^3
f <- function(x) {5*x + x^3}

# Interval [0, 4]
a <- 0
b <- 4

# Menghitung integral fungsi pada interval [0, 4]
integral_value <- integrate(f, lower = a, upper = b)$value

# Menghitung rata-rata nilai fungsi f(c)
f_c <- integral_value / (b - a)

# Mencari nilai c secara numerik menggunakan fungsi akar
root_function <- function(c) {f(c) - f_c}
c <- uniroot(root_function, lower = a, upper = b)$root

# Menampilkan hasil
cat("Hasil untuk f(x) = 5x + x^3:\n")
cat("Nilai rata-rata f(c):", f_c, "\n")
cat("Nilai c:", c, "\n\n")

# Plot grafik fungsi f(x)
x_vals <- seq(a, b, length.out = 500) # Titik-titik pada sumbu x
y_vals <- f(x_vals) # Hitung nilai f(x) untuk setiap titik x

# Plot fungsi
plot(x_vals, y_vals, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
     xlab = "x", ylab = "f(x)")
abline(h = f_c, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
abline(v = c, col = "green", lty = 2, lwd = 2)
legend("topright", legend = c(expression(f(x) == 5*x + x^3),
```

```
expression(f(c) == f_c),
expression(c)),
col = c("blue", "red", "green"), lty = 1:2, lwd = 2)
```

**Contoh 4.2. (Fungsi Kuadrat dan Fungsi Bobot Sinusoidal)**

Diberikan fungsi  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = \sin(x)$  pada interval  $[0, \pi]$ . Tentukan nilai  $c$  yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral.

**Langkah Penyelesaian:**

Menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral pada persamaan (3.2) dengan  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sin(x)$  pada interval  $[0, \pi]$ .

Langkah-langkah penyelesaian diberikan sebagai berikut.

- a. Menghitung integral  $\int_0^\pi f(x)g(x) dx$  menggunakan integral parsial.

$$I_1 = \int_0^\pi x^2 \sin(x) dx$$

Misalkan:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos(x)$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ &= -x^2 \cos(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos(x) dx \\ &= -\pi^2 \cos(\pi) + 2 \int_0^\pi x \cos(x) dx \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan integral, kembali menggunakan integral parsial

Misalkan:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x)$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} I_1 &= -\pi^2 \cos(\pi) + 2(x \sin(x)) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) dx \\ &= -\pi^2 \cos(\pi) + 2(\pi \sin(\pi) + \cos(x)) \Big|_0^\pi \\ &= -\pi^2 \cos(\pi) + 2(\pi \sin(\pi) + \cos(\pi) - \cos(0)) \\ &= -\pi^2 \cos(\pi) + 2\pi \sin(\pi) + 2 \cos(\pi) - 2 \\ &= -\pi^2(-1) + 2\pi(0) + 2(-1) - 2 \\ &= \pi^2 - 4. \end{aligned}$$

- b. Menghitung integral  $\int_0^\pi g(x) dx$ .

$$I_2 = \int_0^\pi \sin(x) dx$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi \sin(x) dx \\ &= -[\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

- c. Menentukan  $f(c)$

$$f(c) = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\pi^2 - 4}{2}$$

- d. Menentukan nilai  $c$ .

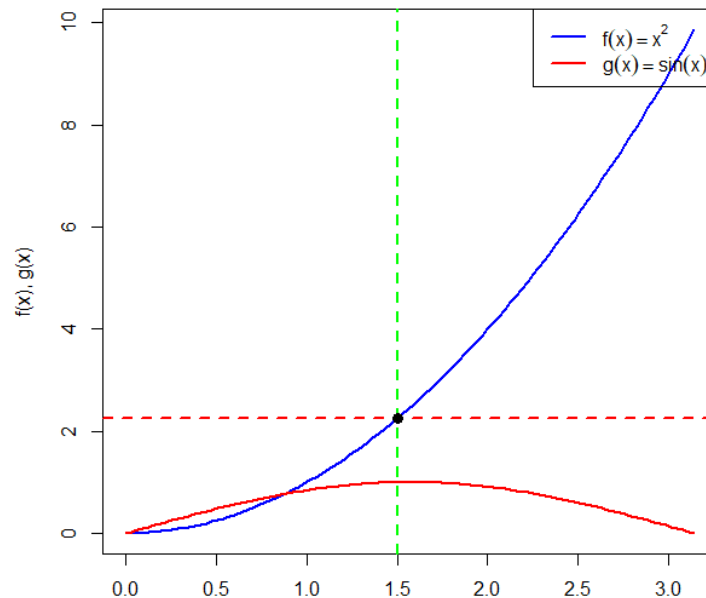
Karena  $f(c) = c^2$  maka diperoleh

$$c = \sqrt{\frac{\pi^2 - 4}{2}}$$

Untuk nilai  $\pi \approx 3,1416$  diperoleh

$$c = \sqrt{\frac{(3,1416)^2 - 4}{2}} \approx 1,7131.$$

Karena  $c$  berada pada interval  $[0, \pi]$ , diperoleh nilai  $c \approx 1,7131$ .



**Gambar 4.2.** Grafik fungsi  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = \sin(x)$  pada interval  $[0, \pi]$ .

Gambar 4.2 menyajikan representasi grafis dari fungsi  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = \sin(x)$  pada interval  $[0, \pi]$ . Garis putus-putus horizontal berwarna merah menunjukkan  $f(c)$ , sedangkan garis putus-putus vertikal berwarna hijau mewakili nilai  $c$  yang sesuai, yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral. Visualisasi ini mendukung pembuktian teoretis dengan menggambarkan keberadaan titik  $c$  tersebut. Skrip R yang digunakan untuk menghasilkan gambar ini disediakan untuk memastikan reproduktibilitas.

```
library(pracma)

# Mendefinisikan fungsi f(x) dan g(x)
f <- function(x) x^2
g <- function(x) sin(x)

# Mendefinisikan integral pada interval [0, pi]
a <- 0
b <- pi
I1 <- integral(function(x) f(x) * g(x), a, b)
I2 <- integral(g, a, b)
c_value <- sqrt(I1 / I2)
f_c <- f(c_value)

# Mendefinisikan nilai x untuk plotting
x <- seq(a, b, length.out = 100)

f_x <- f(x)
```

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Kasmila Ulansari, Faihatuz Zuhairoh

```
g_x <- g(x)

# Plot fungsi f(x) = x^2 dan g(x) = sin(x)
plot(x, f_x, type = "l", col = "blue", lwd = 2, ylim = c(0, max(f_x)),
     xlab = "x", ylab = "f(x), g(x)")
lines(x, g_x, col = "red", lwd = 2)
legend("topright", legend = c(expression(f(x) == x^2), expression(g(x)
== sin(x))),
     col = c("blue", "red"), lwd = 2)
abline(h = f_c, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
abline(v = c_value, col = "green", lty = 2, lwd = 2)points(c_value, f_c,
col = "black", pch = 19, cex = 1.2)
curve(g, from = 0, to = pi, col = "red", lwd = 2, add = TRUE)
legend("topright", legend = c("f(x) = x^2", "g(x) = sin(x)"), col =
c("blue", "red"), lwd = 2)
```

### Contoh 4.3.

Diberikan fungsi  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = \sin x$  pada interval  $[0, \pi]$ . Tentukan nilai  $c$  yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral dengan fungsi berbobot non-monotonik.

#### Langkah Penyelesaian:

Dengan menggunakan penyelesaian yang telah dijabarkan pada contoh 4.2 diperoleh hasil sebagai berikut.

$$I_1 = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4,$$

dan

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2.$$

Dengan menggunakan pengembangan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral, kita tahu bahwa,

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = f(c) \int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

Substitusi nilai-nilai yang telah dihitung

$$\pi^2 - 4 = f(c) \cdot 2 + \varepsilon.$$

Dari sini, kita dapat menyelesaikan untuk  $c$  dan  $\varepsilon$ , dengan pendekatan numerik jika perlu.

Mengasumsikan  $\varepsilon \approx 0$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} \pi^2 - 4 &= f(c) \cdot 2 + \varepsilon \\ c^2 &= \frac{\pi^2 - 4}{2}. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$c = \sqrt{\frac{\pi^2 - 4}{2}}.$$

Untuk menguji keakuratan teorema ini, dilakukan perhitungan numerik dengan metode integrasi menggunakan software **R**. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa untuk variasi dalam rentang  $[-0,5, 0,5]$ , nilai tetap berada dalam interval yang wajar. Hal ini menegaskan bahwa meskipun terdapat faktor koreksi, konsep nilai rata-rata masih dapat diterapkan.

Berikut adalah beberapa hasil numerik yang diperoleh:

- Untuk  $\varepsilon = -0,5$ , nilai  $c = 1,7846$
- Untuk  $\varepsilon = 0$ , nilai  $c = 1,7131$  (mendekati hasil teorema klasik)
- Untuk  $\varepsilon = 0,5$ , nilai  $c = 1,6385$ .

Perubahan yang stabil pada nilai  $c$  terhadap  $\varepsilon$  menunjukkan bahwa faktor koreksi memberikan deviasi yang dapat diprediksi tanpa menyebabkan ketidaksesuaian teorema.

## 5. STUDI KASUS

Dalam probabilitas dan statistik, integral berbobot sering digunakan untuk menghitung ekspektasi suatu variabel acak kontinu. Salah satu contoh penerapan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral adalah dalam menghitung ekspektasi rata-rata pendapatan individu berdasarkan distribusi berbobot.

### Kasus 1: Estimasi Pendapatan Rata-rata Berbobot dalam Suatu Populasi

Misalkan kita ingin mengestimasi pendapatan rata-rata penduduk di suatu kota berdasarkan distribusi probabilitas yang berbentuk eksponensial. Dalam banyak kasus nyata, pendapatan penduduk sering kali tidak terdistribusi secara uniform, melainkan mengikuti distribusi eksponensial atau log-normal, dengan sebagian kecil penduduk memiliki pendapatan yang jauh lebih tinggi daripada mayoritas populasi. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral, kita dapat mencari nilai pendapatan rata-rata berbobot berdasarkan distribusi probabilitas yang diberikan.

Misalkan  $X$  adalah pendapatan individu yang mengikuti distribusi eksponensial dengan parameter  $\lambda$ , yaitu:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

Kita ingin mencari ekspektasi pendapatan dengan bobot probabilitas  $g(x)$ , yang juga berbentuk eksponensial tetapi dengan parameter berbeda:

$$g(x) = \mu e^{-\mu x}, x \geq 0$$

Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral, kita mencari nilai  $c$  sedemikian sehingga:

$$\frac{\int_0^{\infty} x f(x) g(x) dx}{\int_0^{\infty} g(x) dx} = c.$$

Substitusi fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$ :

$$\frac{\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu x} dx}{\int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x} dx} = c$$

$$\frac{\lambda \mu \int_0^{\infty} x e^{-(\lambda+\mu)x} dx}{\mu \left(\frac{1}{\mu}\right)} = c$$

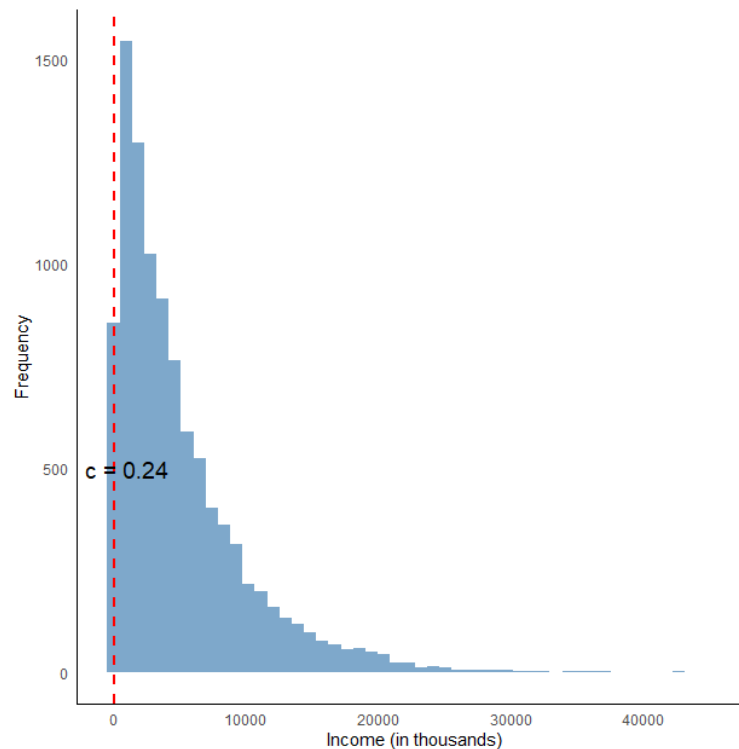
$$\lambda \mu \int_0^{\infty} x e^{-(\lambda+\mu)x} dx = c \quad (\text{menggunakan rumus integral: } \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2})$$

$$\lambda \mu \cdot \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} = c$$

Jadi, diperoleh

$$c = \frac{\lambda \mu}{(\lambda + \mu)^2}.$$

Nilai  $c$  ini merupakan pendapatan rata-rata berbobot berdasarkan dua distribusi eksponensial dengan parameter  $\lambda$  dan  $\mu$ . Hasil ini menunjukkan bagaimana teorema dapat digunakan dalam analisis pendapatan, terutama dalam statistik ekonomi dan model distribusi pendapatan di suatu wilayah. Ilustrasi kasus 1 diberikan pada Gambar 5.1. Skrip R yang digunakan untuk menghasilkan gambar ini disediakan untuk memastikan reproduibilitas.



**Gambar 5.1.** Histogram Distribusi Pendapatan dengan Garis Rata-Rata Berbobot.

```
# Set parameter distribusi eksponensial
lambda <- 1/5000 # Rata-rata pendapatan sekitar 5000 (dalam ribuan)
mu <- 1/7000 # Distribusi bobot dengan parameter berbeda

# Generate data pendapatan untuk populasi (misalkan 10.000 orang)
set.seed(123)
income <- rexp(10000, rate = lambda)

# Menghitung rata-rata berbobot dengan integral numerik
numerator <- lambda * mu * integrate(function(x) x * exp(-(lambda + mu) *
x), 0, Inf)$value
denominator <- integrate(function(x) mu * exp(-mu * x), 0, Inf)$value
c_value <- numerator / denominator

# Plot distribusi pendapatan
df <- data.frame(income)
ggplot(df, aes(x = income)) +
  geom_histogram(bins = 50, fill = "steelblue", alpha = 0.7) +
  geom_vline(xintercept = c_value, color = "red", linetype = "dashed",
size = 1) +
  labs(x = "Income (in thousands)",
y = "Frequency") +
  annotate("text", x = c_value + 1000, y = 500, label = paste("c =",
round(c_value, 2)), color = "black", size = 5) +
  theme_minimal() +
  theme(panel.grid = element_blank(),
panel.border = element_blank(),
axis.line = element_line(color = "black"))
```

**Kasus 2: Prediksi Harga Rumah dengan Bobot Probabilitas**

Misalkan kita memiliki dataset harga rumah di suatu kota, dengan fitur utama berupa luas rumah ( $X$ ) dan harga rumah ( $Y$ ). Dalam model prediksi harga rumah, kita sering kali ingin mencari nilai ekspektasi berbobot dari harga rumah berdasarkan distribusi luas rumah. Sebagai contoh, rumah dengan luas lebih kecil mungkin lebih banyak jumlahnya dalam dataset, tetapi rumah dengan luas lebih besar memiliki harga yang jauh lebih tinggi. Jika kita hanya menggunakan rata-rata biasa, maka nilai yang diperoleh bisa jadi tidak mencerminkan realitas pasar. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral, kita dapat menghitung rata-rata harga rumah berbobot berdasarkan distribusi luas rumah.

Misalkan kita memiliki data luas rumah di suatu kota yang terdistribusi secara normal, dan harga rumah diprediksi dengan model linier berdasarkan luas rumah. Dengan demikian, kita ingin mengetahui rata-rata harga rumah berbobot yang dihitung berdasarkan distribusi probabilitas luas rumah.

Langkah-langkah menyelesaikan persoalan ini diberikan sebagai berikut.

**Definisi Fungsi**1. Fungsi  $f(x)$ : Model Harga Rumah

Model linier untuk harga rumah diasumsikan sebagai:

$$f(x) = ax + b$$

di mana:

$x$  adalah luas rumah,

$a$  adalah koefisien (misalnya, harga per satuan luas),

$b$  adalah nilai tetap (biaya tetap atau harga dasar).

2. Fungsi  $g(x)$ : Fungsi kepadatan peluang (FKP) luas rumah

Diasumsikan bahwa luas rumah  $x$  berdistribusi normal dengan rata-rata  $\mu_X$  dan varians  $\sigma_X^2$ , sehingga:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

Karena  $g(x)$  merupakan FKP, kita memiliki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

(Dalam konteks luas rumah, kita dapat membatasi domain  $x \geq 0$  dan mengasumsikan probabilitas negatif sangat kecil atau diabaikan.)

**Penerapan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral**

Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral menyatakan bahwa jika  $f$  dan  $g$  kontinu pada interval tertentu dan  $g(x)$  tidak berubah tanda, maka terdapat  $c$  dalam interval tersebut sehingga:

$$\frac{\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx}{\int_0^{\infty} g(x)dx} = f(c).$$

karena  $g(x)$  adalah FKP, maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1,$$

sehingga rata-rata berbobot dari  $f(x)$  adalah:

$$f(c) = \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

Karena  $f(x) = ax + b$  adalah fungsi linier, kita peroleh:

# JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Kasmila Ulansari, Faihatuz Zuhairroh

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx = a \int_0^{\infty} xg(x)dx + b \int_0^{\infty} g(x)dx = a\mu_X + b,$$

di mana  $\mu_X = \int_0^{\infty} xg(x)dx$  adalah nilai harapan (*mean*) dari distribusi  $g(x)$ .

Sehingga:

$$f(c) = a\mu_X + b.$$

Namun, karena  $f(c) = ac + b$ , dengan menyetarakan kedua ekspresi:

$$ac + b = a\mu_X + b,$$

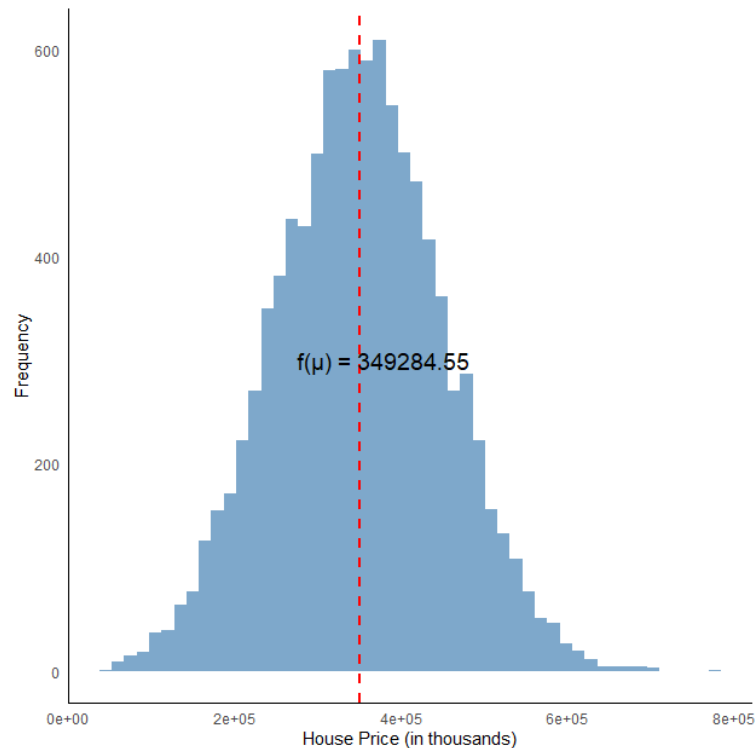
sehingga diperoleh

$$ac = a\mu_X \Rightarrow c = \mu_X,$$

asalkan  $a \neq 0$ .

Nilai  $c$  yang menjamin bahwa  $f(c)$  sama dengan rata-rata berbobot  $f(x)$  adalah  $c = \mu_X$ , yaitu rata-rata luas rumah. Dengan demikian, rata-rata harga rumah berbobot (menurut model linier) adalah:

$$f(c) = a\mu_X + b.$$



**Gambar 5.2.** Distribusi Harga Rumah dan Estimasi Harga Rata-rata Berbobot.

```
# Set parameter distribusi luas rumah
mu_X <- 150 # Rata-rata luas rumah (misalnya, dalam m^2)
sigma_X <- 50 # Standar deviasi luas rumah

# Parameter model regresi harga rumah (Y = ax + b)
a <- 2000 # Harga per m^2 (dalam satuan tertentu, misalnya ribuan rupiah)
b <- 50000 # Biaya tetap (dalam ribuan rupiah)

# Generate data luas rumah (pastikan nilai positif)
set.seed(42)
luas_rumah <- rnorm(10000, mean = mu_X, sd = sigma_X)
```

# JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Kasmila Ulansari, Faihatuz Zuhairoh

```
luas_rumah <- luas_rumah[luas_rumah > 0]

# Menghitung harga rumah berdasarkan model linier
harga_rumah <- a * luas_rumah + b

# Rata-rata luas rumah berdasarkan data (estimasi  $\mu_X$ )
mu_est <- mean(luas_rumah)

# Menghitung rata-rata harga rumah berbobot sesuai model:  $f(\mu_X)$ 
harga_rumah_berbobot <- a * mu_est + b

# Menampilkan hasil
cat("Rata-rata luas rumah ( $\mu_X$ ):", round(mu_est, 2), "\n")
cat("Estimasi rata-rata harga rumah berbobot:",
    round(harga_rumah_berbobot, 2), "\n")

# Plot distribusi harga rumah dan garis rata-rata berbobot
df <- data.frame(house_price)
ggplot(df, aes(x = house_price)) +
  geom_histogram(bins = 50, fill = "steelblue", alpha = 0.7) +
  geom_vline(xintercept = weighted_house_price, color = "red", linetype =
    "dashed", size = 1) +
  labs(x = "House Price (in thousands)",
       y = "Frequency") +
  annotate("text", x = weighted_house_price + 30000, y = 300,
    label = paste("f( $\mu$ ) =", round(weighted_house_price, 2)),
    color = "black", size = 5) +
  theme_minimal() +
  theme(panel.grid = element_blank(),
        panel.border = element_blank(),
        axis.line = element_line(color = "black"))
```

Hasil penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori analisis real, khususnya dalam penerapan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral dalam evaluasi integral berbobot. Dengan memahami bagaimana nilai rata-rata fungsi terhadap fungsi berbobot dapat dihitung secara analitis, hasil ini memperkuat dasar teori dalam analisis integral dan dapat diaplikasikan dalam berbagai studi terkait, seperti teori probabilitas dan data sains.

Selain itu, penelitian ini dapat berperan dalam pembuktian dan generalisasi teorema serupa di ruang metrik atau ruang Lebesgue, yang merupakan salah satu cabang penting dalam analisis fungsional. Dengan pendekatan yang digunakan, metode ini juga bisa diperluas untuk diterapkan dalam sistem integral yang lebih kompleks, seperti dalam transformasi integral dan teori operator linear.

Secara praktis, hasil penelitian ini dapat diterapkan dalam berbagai bidang yang menggunakan metode integral berbobot, di antaranya:

## a. Fisika dan Teknik

- Dalam pemodelan fenomena fisika, seperti perpindahan panas dan dinamika fluida, integral berbobot sering digunakan untuk menghitung distribusi rata-rata suatu variabel terhadap parameter tertentu.
- Dalam teknik elektro dan pemrosesan sinyal, konsep ini dapat digunakan dalam analisis respons sistem terhadap fungsi eksponensial atau sinusoidal.

## b. Ekonomi dan Keuangan

- Dalam teori ekonomi matematika, konsep ini dapat digunakan untuk menghitung nilai rata-rata berbobot dari suatu fungsi permintaan atau penawaran dalam kurun waktu tertentu.
- Dalam keuangan, pendekatan ini dapat diterapkan dalam penilaian aset berbasis integral eksponensial, seperti dalam perhitungan *Net Present Value (NPV)* dari arus kas kontinu.

## c. Pemodelan Probabilitas dan Statistik

- Dalam teori probabilitas, integral berbobot sering muncul dalam ekspektasi matematis dari variabel acak kontinu. Hasil penelitian ini dapat memberikan metode yang lebih terstruktur dalam evaluasi ekspektasi berbobot dengan distribusi eksponensial atau lainnya.
- Dalam pembelajaran mesin dan kecerdasan buatan, konsep ini dapat diterapkan dalam analisis distribusi probabilitas serta optimasi model berbasis integral.

## 6. KESIMPULAN

Penelitian ini membahas penerapan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral pada fungsi berbobot, dengan fokus pada penyelesaian analitis dari integral tertentu. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa nilai rata-rata suatu fungsi terhadap fungsi berbobot dapat ditentukan dengan pendekatan integral yang telah dikembangkan, yang sejalan dengan teori dasar dalam analisis real.

Dalam artikel ini kami telah membuktikan Teorema Nilai Rata-rata Kedua untuk Integral. Teorema ini dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu. Teorema integral dapat digunakan untuk menemukan nilai tengah dari suatu fungsi yang diintegrasikan. Selain itu dapat menggunakan teorema dasar integral untuk menemukan nilai  $f(c)$  di mana  $f(x)g(x)dx$  diintegrasikan, di mana  $g(x)$  adalah fungsi yang dapat diintegrasikan dan  $g(x) \geq 0$  (atau  $g(x) \leq 0$ ) pada interval  $[a, b]$ .

Temuan ini memiliki implikasi yang signifikan baik secara teoretis maupun praktis. Dari sisi teori, penelitian ini memperkaya kajian analisis integral dengan menunjukkan bahwa konsep nilai rata-rata integral dapat diterapkan dalam berbagai bentuk fungsi berbobot. Dari sisi aplikasi, hasil ini dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu, termasuk fisika, ekonomi, dan statistik, terutama dalam analisis data dan pemodelan sistem yang melibatkan integral eksponensial.

Ke depan, penelitian ini dapat diperluas dengan mengeksplorasi generalisasi ke fungsi berbobot yang lebih kompleks atau penerapan dalam ruang metrik yang lebih luas. Selain itu, pendekatan numerik juga dapat digunakan untuk memperkirakan nilai integral dalam kasus di mana penyelesaian analitis sulit ditemukan.

## REFERENSI

- [1] Abdo, M. S., Abdeljawad, T., Kucche, K. D., Alqudah, M. A., Ali, S. M., & Jeelani, M. B., 2021. On nonlinear pantograph fractional differential equations with Atangana–Baleanu–Caputo derivative. *Advances in Difference Equations*, Vol. 65, No. 1, 1-17.
- [2] Baker, C. W., 1979. Mean Value Type Theorems of Integral Calculus. *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 10, No. 1, 35-37.
- [3] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. 2011. *Introduction to Real Analysis (Fourth Edition)*. John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Butt, A. I. K., Ahmad, W., Rafiq, M., & Baleanu, D., 2022. Numerical analysis of Atangana–Baleanu fractional model to understand the propagation of a novel corona virus pandemic. *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 61, No. 9, 7007-7027.
- [5] Dixon, A. C., 1929. The Second Mean Value Theorem in the Integral Calculus. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 25, No. 3, 282-184.
- [6] Fernandez, A., & Baleanu, D., 2018. The mean value theorem and Taylor's theorem for fractional derivatives with Mittag–Leffler kernel. *Advances in Difference Equations*, Vol. 86, No. 1, 1-11.
- [7] Hobson, E. W., 1909. On the second mean-value theorem of the integral calculus. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. s2-7, No. 1, 14-23.
- [8] Lozada-Cruz, G., 2020. Some Applications of Cauchy's Mean Value Theorem. *Asia Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 7, No. 30, 1-9.

- [9] Matkowski, J., 2011. A mean-value theorem and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 373, No. 1, 227-234.
- [10] Sasongko, L. R., & Susanto, B., 2020. The Mean Value Theorem for Integrals Method for Estimating Two-Dimensional Renewal Functions. *JTAM | Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika*, Vol. 4, No. 1, 49-55.
- [11] Tirado-Serrato, J. G., 2023. Exact Solution to the Mean Value Theorem Applied to the Maximum Power Point Estimation. *IEEE Journal of Photovoltaics*, Vol. 13, No. 5, 750-755.
- [12] Toma, Y., 2023. Mean value theorems for the Apostol–Vu double zeta-function and its application. *European Journal of Mathematics*, Vol. 9, No. 71, 1-33.
- [13] Tucker, T. W., 1997. Rethinking rigor in calculus: The role of the mean value theorem. *American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 3, 231-240.
- [14] Witua, R., Hetmaniok, E., & Słota, D., 2012. A stronger version of the second mean value theorem for integrals. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 64, No. 6, 1612-1615.
- [15] Wu, S., 2023. Proof and Application of the Mean Value Theorem. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, Vol. 72, 565-571.
- [16] Zhang, C., Lü, Q., Yan, J., & Qi, G., 2018. Numerical Solutions of the Mean-Value Theorem: New Methods for Downward Continuation of Potential Fields. *Geophysical Research Letters*, Vol. 45, No. 8, 3461-3470.