

Block Backward Differentiation Formula Method for Solving Van der Pol Equation

Metode *Block Backward Differentiation Formula* untuk Penyelesaian Persamaan Van der Pol

Jova Edri Saputra¹, Werry Febrianti^{2*}

^{1,2}Program Studi Matematika, Fakultas Sains, Institut Teknologi Sumatera

Email: ¹jova.121160021@student.itera.ac.id, ²werry.febrianti@ma.itera.ac.id

*Corresponding author

Received: 3 March 2025, revised: 26 April 2025, accepted: 28 April 2025

Abstract

The Van der Pol (VDP) equation is one of the nonlinear oscillation equations often used in physics and biology, such as in the model of tectonic plate interaction and oscillations in electrical and electronic systems. This equation is in the form of a second-order nonlinear ordinary differential equation (ODE) and contains a parameter μ that causes the stiffness properties of the equation. The VDP equation does not have an exact solution, so this study aims to obtain a numerical solution to the VDP equation using the Block Backward Differentiation Formula (BBDF) method, which is generally applied to first-order ODEs. Order reduction of the VDP equation to a first-order ODE system is carried out so BBDF can be used. In the special case of $\mu = 0$, where VDP becomes a simple oscillation equation, the BBDF method provides a smaller Root Mean Square Error (RMSE) value than the MATLAB solver (ODE15s and ODE45). Stability analysis and numerical calculations are also carried out for various other values of μ , and the results show that the BBDF method produces consistent solutions for variations in the step size h . This result shows that BBDF is proven to be effective in solving the VDP equation for various values of the parameter μ .

Keywords: Numerical Method, BBDF, Nonlinear oscillation, Van der Pol, Stiffness

Abstrak

Persamaan Van der Pol (VDP) merupakan salah satu persamaan osilasi nonlinier yang sering digunakan dalam bidang fisika dan biologi, seperti pada model interaksi lempeng tektonik dan osilasi dalam sistem listrik serta elektronik. Persamaan ini berbentuk persamaan diferensial biasa (PDB) nonlinier orde dua dan mengandung parameter μ yang menyebabkan sifat *stiffness* pada persamaan. Persamaan VDP tidak memiliki solusi eksak, sehingga penelitian ini bertujuan memperoleh solusi numerik persamaan VDP menggunakan metode *Block Backward Differentiation Formula* (BBDF), yang umumnya diterapkan pada PDB orde satu. Reduksi orde persamaan VDP menjadi sistem PDB orde satu dilakukan agar BBDF dapat diterapkan. Pada kasus khusus $\mu = 0$, di mana VDP menjadi persamaan osilasi sederhana, metode



BBDF memberikan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE) yang lebih kecil daripada *Matlab solver* (ODE15s dan ODE45). Analisis ketabihan dan perhitungan numerik juga dilakukan untuk berbagai nilai μ lainnya, dan hasil menunjukkan bahwa metode BBDF menghasilkan solusi yang konsisten untuk variasi ukuran langkah h . Hasil ini menunjukkan bahwa BBDF terbukti efektif dalam menyelesaikan persamaan VDP untuk berbagai nilai parameter μ .

Kata kunci: Metode Numerik, BBDF, Osilasi Nonlinier, Van der Pol, Stiffness

1. Pendahuluan

Persamaan Van der Pol (VDP) pertama kali diperkenalkan oleh Balthasar Van der Pol pada tahun 1920-an untuk menggambarkan rangkaian triode yang berosilasi sendiri secara sederhana [16]. Persamaan ini digunakan sebagai model dasar untuk sistem osilasi di bidang fisika dan biologi, seperti interaksi dua lempeng dalam patahan geologi serta osilasi dalam berbagai sistem listrik dan elektronik. Persamaan VDP berbentuk persamaan diferensial nonlinier orde dua dan dikenal dengan fenomena *stiffness* [5], terutama untuk nilai parameter μ yang besar. Fenomena ini menunjukkan adanya relaksasi-osilasi yang dikenal sebagai suatu tipe *limit cycle*, dimana solusi memiliki perubahan cepat dan lambat sehingga menyebabkan persamaan VDP tidak mudah diselesaikan secara analitik untuk mendapatkan solusi eksak [17]. Fenomena ini menjadi tantangan dalam menyelesaikan persamaan tersebut secara numerik [5].

Solusi numerik untuk persamaan VDP telah mengalami banyak perkembangan. Beberapa pendekatan mencakup metode modifikasi dekomposisi Adomian dalam menyelesaikan persamaan VDP dengan nilai parameter $\mu = 1$ [13], dan metode Adams-Bashforth-Moulton untuk persamaan VDP orde fraksional dengan $\mu = 2.5$ [6]. Selain itu, metode Pertubasi Homotopi juga telah digunakan untuk persamaan VDP dengan orde fraksional [9]. Beberapa penelitian lainnya menggunakan metode *Multiple Scale* [11], serta kombinasi antara Transformasi Elzaki dan Homotopi Pertubasi yang menciptakan pendekatan hibrida untuk menyelesaikan persamaan VDP. Terdapat pula penggunaan metode *Diagonal Block* [18] dan *Backward Difference Formula* (BDF) [4] untuk penyelesaian persamaan VDP. Namun, diantara berbagai metode tersebut belum ada yang menggunakan pendekatan yang dapat memberikan aproksimasi beberapa solusi sekaligus dalam satu kali iterasi.

Salah satu pendekatan yang dapat diterapkan dalam menyelesaikan persamaan VDP adalah reduksi orde sehingga persamaan VDP dapat diubah menjadi sistem persamaan diferensial orde pertama. Pendekatan ini menggandakan jumlah persamaan yang harus diselesaikan dan menambah beban komputasi. Selain itu, metode eksplisit sering kali tidak efisien ketika diterapkan pada persamaan yang memiliki fenomena *stiffness*. Dalam hal ini, metode implisit seperti BDF telah lama dikenal sebagai solusi yang lebih efektif untuk menyelesaikan persamaan dengan fenomena *stiffness* tersebut. Beberapa penelitian telah berhasil mengimplementasikan skema BDF dalam bentuk blok [1], [8], [3], [2], [14]. Misalnya, metode *Block Backward Differentiation Formula* (BBDF) [15] yang dapat memberikan dua hingga tiga solusi sekaligus dalam satu kali iterasi.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menerapkan metode BBDF untuk menyelesaikan persamaan VDP yang terlebih dahulu direduksi menjadi sistem persamaan diferensial orde satu. Meskipun hal ini merupakan prosedur standar dalam analisis numerik, tantangan utama justru terletak pada pemilihan metode numerik yang tepat dalam menghadapi karakteristik *stiffness* yang ditimbulkan oleh nilai parameter μ . Oleh karena itu, penerapan metode BBDF diharapkan tidak hanya mampu menghasilkan solusi dengan akurasi tinggi, tetapi juga menunjukkan efisiensi yang baik dalam penyelesaian persamaan diferensial nonlinier yang bersifat *stiffness*.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Reduksi Orde

Reduksi orde merupakan proses mengubah persamaan diferensial orde- n menjadi sistem persamaan diferensial orde satu. Berikut adalah bentuk umum dari persamaan diferensial linier orde- n dengan koefisien konstan.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x). \quad (2.1)$$

Dengan mendefinisikan $y_1 = y, y_2 = \frac{dy}{dx}, \dots, y_n = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$, persamaan (2.1) dapat diturunkan kembali dalam bentuk variabel baru. Setiap turunan persamaan asal ditulis ulang menggunakan variabel $y_1, y_2, \dots, y_n$ sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial orde satu berikut.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} y_{n-1}}{dx^{n-1}} = y_n, \\ \frac{d^n y_n}{dx^n} = -a_{n-1}(x)y_n - \cdots - a_0(x)y_1 + g(x). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

2.2 Block Backward Differentiation Formula

Block Backward Differentiation Formula (BBDF) merupakan metode banyak langkah untuk integrasi numerik PDB. Metode ini dibangun dengan menginterpolasi $y' = f(x, y)$ dan diterapkan secara blok menggunakan interpolasi polinomial Lagrange untuk mengaproksimasi solusi di beberapa titik secara bersamaan [19]. Interpolasi polinomial Lagrange dinyatakan sebagai:

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k L_{k,j}(x) f(x_{n+1-j}) \quad (2.3)$$

dengan polinomial Lagrange $L_{j,k}(x)$ diberikan oleh:

$$L_{k,j}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k \frac{(x - x_{n+1-i})}{(x_{n+1-j} - x_{n+1-i})}; j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

dengan $P_k(x)$ adalah fungsi interpolasi polinomial Lagrange berderajat k , $f(x_{n+1-j})$ adalah koefisien interpolasi Lagrange, dan $L_{k,j}(x)$ adalah Polinomial Lagrange.

Proses penurunan metode 2-point BBDF dimulai dengan menggunakan ukuran langkah h , dimana titik x_{n-1} dan x_n digunakan untuk mengaproksimasi nilai y_{n+1} dan y_{n+2} secara bersamaan pada x_{n+1} dan x_{n+2} . Persamaan interpolasi polinomial Lagrange disusun dengan mensubstitusikan titik-titik interpolasi x_{n-1}, x_n, x_{n+1} , dan x_{n+2} ke dalam persamaan (2.3), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})}{(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - x_{n-1})} y_{n+2} \\ &+ \frac{(x - x_{n+2})(x - x_n)(x - x_{n-1})}{(x_{n+1} - x_{n+2})(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})} y_{n+1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x - x_{n+2})(x - x_{n+1})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_{n+2})(x_n - x_{n+1})(x_n - x_{n-1})} y_n \\
& + \frac{(x - x_{n+2})(x - x_{n+1})(x - x_n)}{(x_{n-1} - x_{n+2})(x_{n-1} - x_{n+1})(x_{n-1} - x_n)} y_{n-1}
\end{aligned}$$

Substitusi $x = sh + x_{n+1}$ ke dalam persamaan (2.4). Selanjutnya, turunan pertama dari persamaan tersebut terhadap s , lakukan evaluasi pada $s = 0$ dan $s = 1$. Dengan mendefinisikan $hf_{n+1,n+2} = P'(x_{n+1,n+2})$, diperoleh skema numerik untuk metode 2-point BBDF sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= -\frac{1}{3}y_{n-1} + 2y_n - \frac{2}{3}y_{n+2} + 2hf_{n+1} \\
y_{n+2} &= \frac{2}{11}y_{n-1} - \frac{9}{11}y_n + \frac{18}{11}y_{n+1} + \frac{6}{11}hf_{n+2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Metode 3-point BBDF juga mengikuti langkah serupa, tetapi kali ini menggunakan titik-titik x_{n-2}, x_{n-1} , dan x_n untuk mengaproksimasi y_{n+1}, y_{n+2} , dan y_{n+3} secara bersamaan pada x_{n+1}, x_{n+2} , dan x_{n+3} . Setelah melakukan interpolasi polinomial dengan titik-titik tersebut, substitusi $x = sh + x_{n+1}$. Dari turunan pertama terhadap s , lakukan evaluasi pada $s = 0$, $s = 1$, dan $s = 2$ dan definisikan $hf_{n+1,n+2,n+3} = P'(x_{n+1,n+2,n+3})$ sehingga diperoleh skema numerik untuk metode 3-point BBDF sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= \frac{1}{10}y_{n-2} - \frac{3}{4}y_{n-1} + 3y_n - \frac{3}{2}y_{n+2} + \frac{3}{20}y_{n+3} + 3hf_{n+1} \\
y_{n+2} &= -\frac{3}{65}y_{n-2} + \frac{4}{13}y_{n-1} - \frac{12}{13}y_n + \frac{24}{13}y_{n+1} - \frac{12}{65}y_{n+3} + \frac{12}{13}hf_{n+2} \\
y_{n+3} &= \frac{12}{137}y_{n-2} - \frac{75}{137}y_{n-1} + \frac{200}{137}y_n - \frac{300}{137}y_{n+1} + \frac{300}{137}y_{n+2} + \frac{60}{137}hf_{n+3}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 Penerapan Block Backward Differentiation Formula

Metode BBDF diterapkan menggunakan iterasi Newton yang dikombinasikan dengan skema prediktor-korektor [12]. Berikut adalah beberapa langkah skema numerik dari metode 2-point BBDF.

- 1) Pada langkah awal, nilai solusi prediksi dihitung menggunakan persamaan prediktor [15]. Dalam penelitian ini, metode Heun digunakan untuk mengaproksimasi beberapa nilai awal sehingga metode 2-point BBDF dapat diterapkan. Metode Heun dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(0)} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})]
\end{aligned}$$

- 2) Setelah nilai prediksi dihitung, evaluasi kesalahan dilakukan untuk menghitung nilai $e_{n+1,n+2}^{(i+1)} = A^{-1}B$ menggunakan dekomposisi LU, dimana $e_{n+1,n+2}^{(i+1)} = y_{n+1,n+2}^{(i+1)} - y_{n+1,n+2}^{(i)}$ dan matriks A dan B adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2h\left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_{n+1}}\right) & \frac{2}{3} \\ -\frac{18}{11} & 1 - \frac{6}{11}h\left(\frac{\partial f_{n+2}}{\partial y_{n+2}}\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}y_{n-1}^{(i)} + 2y_n^{(i)} - y_{n+1}^{(i)} - \frac{2}{3}y_{n+2}^{(i)} + 2hf_{n+1}^{(i)} \\ \frac{2}{11}y_{n-1}^{(i)} - \frac{9}{11}y_n^{(i)} + \frac{18}{11}y_{n+1}^{(i)} - y_{n+2}^{(i)} + \frac{6}{11}hf_{n+2}^{(i)} \end{bmatrix}$$

dan $\frac{\partial f_{n+1,n+2}}{\partial y_{n+1,n+2}}$ merupakan Jacobian pada iterasi ke- i .

- 3) Nilai akhir $y_{n+1,n+2}^{(i+1)}$ kemudian dikoreksi menggunakan $e_{n+1,n+2}^{(i+1)}$ yang diperoleh dari langkah ke-2. Koreksi ini memastikan solusi yang lebih akurat pada iterasi berikutnya.

Iterasi Newton yang dikombinasikan dengan skema prediktor-korektor untuk 3-point BBDF diterapkan dengan cara yang sama dengan 2-point BBDF, tetapi diperluas untuk tiga nilai solusi sekaligus dalam setiap iterasi.

3. Hasil Penelitian

3.1 Reduksi Persamaan Van der Pol

Persamaan Van der Pol (VDP) merupakan persamaan diferensial orde dua yang dinyatakan sebagai

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \mu(1 - u^2) \frac{du}{dt} + u = 0, \quad (3.1)$$

dengan kondisi awal

$$u(t_0) = u_0, u'(t_0) = v_0.$$

Pada persamaan tersebut, variabel $u(t)$ merepresentasikan besaran dinamik terhadap waktu t yang umumnya menggambarkan tegangan pada rangkaian listrik atau perpindahan dalam sistem mekanik.

Turunan kedua terhadap waktu $\frac{d^2u}{dt^2}$, menunjukkan percepatan atau laju perubahan dari kecepatan sistem. Sementara itu, suku nonlinier $\mu(1 - u^2)$ menggambarkan gaya redaman yang bersifat tidak linier dan bergantung pada keadaan sistem itu sendiri. Parameter $\mu > 0$ mengendalikan intensitas redaman: untuk $|u| < 1$, redaman bersifat negatif, sedangkan untuk $|u| > 1$, redaman menjadi positif yang menciptakan dinamika osilasi relaksasi sistem Van der Pol.

Persamaan ini tidak memerlukan syarat batas (*boundary conditions*) karena yang diselesaikan adalah masalah nilai awal (*initial value problem*), dimana solusi ditentukan sepenuhnya oleh kondisi awal pada waktu $t = t_0$. Permasalahan yang diselesaikan melalui VDP berkaitan erat dengan analisis sistem osilasi nonlinier, seperti dalam pemodelan osilator listrik yang mengandung tabung vakum, maupun sistem biologis dan mekanis yang memperlihatkan *limit cycle*.

Dalam penelitian ini, persamaan VDP digunakan sebagai uji kasus untuk mengevaluasi kinerja metode BBDF dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial yang bersifat *stiffness*. Agar (3.1) dapat diselesaikan menggunakan metode BBDF, persamaan VDP direduksi menjadi sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -u + \mu(1 - u^2)v. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dengan demikian, Persamaan (3.2) memiliki bentuk yang sudah sesuai untuk diselesaikan secara numerik menggunakan metode BBDF. Berdasarkan [10], kondisi awal dari sistem yang telah direduksi ekuivalen dengan kondisi awal sebelum direduksi, yaitu

$$u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0.$$

Selain itu, dalam analisis numerik yang dilakukan, solusi numerik yang diperoleh melalui metode BBDF akan dibandingkan dengan solusi yang dihasilkan oleh *Matlab solver*, yaitu ODE15s dan ODE45. *Solver* tersebut digunakan sebagai acuan evaluasi kinerja metode BBDF.

3.2 Kestabilan Diskritisasi Persamaan VDP menggunakan BBDF

Persamaan VDP dalam orde satu diberikan pada Persamaan (3.2). Linierisasi sistem persamaan ini disekitar titik tetap, dipenuhi oleh

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dengan matriks Jacobian J dipenuhi oleh

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Nilai eigen λ untuk matriks J adalah

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

Untuk $\mu \geq 2$, nilai eigen bersifat riil, dan untuk $0 < \mu < 2$, nilai eigen bersifat kompleks dengan bagian real positif.

Kestabilan 2-point BBDF untuk Persamaan VDP

Substitusi asumsi solusi $y_n = \zeta^n$ dan $f_n = Jy_n$ pada metode 2-point BBDF Persamaan (2.5), diperoleh persamaan karakteristik

$$\det(I - hJR(\zeta)) = 0$$

Pada masing-masing persamaan 2-point BBDF untuk $\mu \gg 1$, diperoleh

$$R(\zeta) = \frac{1}{h\lambda} \approx \frac{1}{h\mu}$$

Karena $\frac{1}{h\mu} < 1$, maka 2-point BBDF pada persamaan VDP selalu stabil untuk setiap pemilihan h pada μ yang diberikan. Namun untuk keakurasian, nilai h dipilih semakin kecil untuk μ semakin besar.

Kestabilan 3-point BBDF untuk Persamaan VDP

Substitusi kembali asumsi solusi $y_n = \zeta^n$ dan $f_n = Jy_n$ pada metode 3-point BBDF Persamaan (2.6), diperoleh persamaan karakteristik yang menghasilkan

$$R(\zeta) = \frac{2}{h(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4h^2})}$$

Pada $\mu \gg 1$, diperoleh

$$R(\zeta) \approx \frac{1}{h\mu}$$

Sehingga 3-point BBDF pada persamaan VDP juga selalu stabil untuk setiap pemilihan h pada μ yang diberikan. Dengan demikian, hubungan h dan μ untuk keakurasian dipenuhi oleh

$$h \leq \frac{C}{\mu} \quad \text{dengan } 0 < C \leq 1 \quad (3.5)$$

3.3 Penyelesaian VDP untuk Kasus $\mu = 0$

Solusi eksak VDP tidak mudah diperoleh secara analitik. Oleh karena itu, pengujian ketepatan BBDF pada VDP dilakukan pada kasus $\mu = 0$ dengan kondisi awal $u_0 = 2$ dan $v_0 = 0$. Pada kasus $\mu = 0$, VDP pada Persamaan (3.1) menjadi bentuk osilasi sederhana yang solusi analitiknya mudah diperoleh

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = u, \quad (3.6)$$

atau dalam bentuk reduksi orde:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -u. \end{cases} \quad (3.7)$$

Pada kasus ini, parameter $\mu = 0$ merepresentasikan bahwa tidak terdapat komponen redaman dalam sistem. Artinya, perubahan dinamika sistem terhadap waktu tidak mengalami disipasi energi, dan osilasi yang dihasilkan bersifat periodik serta mempertahankan amplitudo secara konstan. Hal ini mencerminkan sistem konservatif dengan gerak harmonik sempurna. Solusi analitik persamaan (3.3) dengan kondisi awal $u_0 = 2$ dan $v_0 = 0$ pada kasus $\mu = 0$ adalah

$$u(t) = 2 \cos t, \quad (3.8)$$

dan perbandingan hasil numerik dari Persamaan (3.6) menggunakan BBDF dan *Matlab solver* (ODE15s dan ODE45) terhadap solusi analitik (3.8), diberikan pada **Tabel 1** dengan perhitungan *Root Mean Square Error* (RMSE) mengikuti pada [5].

Tabel 1. RMSE dari $u(t)$ pada kasus $\mu = 0$ untuk $t = 10$

Ukuran langkah	Metode	RMSE $u(t)$
10^{-2}	ODE45	3.09134e-03
	ODE15s	7.14542e-04
	2-point BBDF	9.11328e-05
	3-point BBDF	5.26237e-07
10^{-3}	ODE45	3.03998e-03
	ODE15s	7.14215e-04
	2-point BBDF	9.23866e-07
	3-point BBDF	5.26523e-10
10^{-4}	ODE45	3.03508e-03
	ODE15s	7.15044e-04
	2-point BBDF	2.97762e-08
	3-point BBDF	1.75083e-12

Hasil pada **Tabel 1** memperlihatkan bahwa BBDF memiliki akurasi lebih tinggi dibandingkan metode numerik lainnya (dalam hal ini ODE15s dan ODE45). Akurasi BBDF juga semakin bertambah untuk ukuran langkah h yang semakin kecil. Selanjutnya, BBDF akan digunakan untuk mencari solusi numerik VDP untuk $\mu \neq 0$.

3.4 Penyelesaian dengan Block Backward Differentiation Formula

Parameter μ merupakan koefisien redaman (tanpa satuan) yang bernilai positif dan nilai μ pada penelitian ini divariasikan dalam beberapa nilai $\mu = 1, 10, 100$, dan 200 . Interval waktu yang digunakan berturut-turut adalah $t = [0, 10]$, $t = [0, 100]$, $t = [0, 200]$, dan $t = [0, 400]$. Kondisi awal yang diterapkan adalah $u_0 = 2$ dan $v_0 = 0$. Ukuran langkah h dapat dipilih secara bebas untuk setiap μ sesuai analisis kestabilan. Namun, ukuran langkah dipilih $h = 10^{-2}, 10^{-3}$, dan 10^{-4} untuk akurasi sesuai kondisi (3.5). Selain itu, toleransi *error* yang diterapkan sebesar 10^{-6} . Penyelesaian persamaan VDP dengan BBDF untuk $\mu = 1$ disajikan pada **Tabel 2**.

Tabel 2. Nilai dari $u(t)$ pada ujung interval ($t = 10$) untuk $\mu = 1$

Ukuran langkah	Metode	$u(t)$
10^{-2}	ODE45	2.0119
	ODE15s	-2.0083
	2-point BBDF	-2.0083
	3-point BBDF	-2.0083
10^{-3}	ODE45	-2.0119
	ODE15s	-2.0083
	2-point BBDF	-2.0083
	3-point BBDF	-2.0083
10^{-4}	ODE45	-2.0119
	ODE15s	-2.0083
	2-point BBDF	-2.0083
	3-point BBDF	-2.0083

Pada **Tabel 2**, terlihat bahwa BBDF memiliki hasil yang konsisten untuk kasus $\mu = 1$ dan hasil yang sama juga ditunjukkan oleh ODE15s yang memang dikembangkan untuk persamaan diferensial *stiff*. Hasil **Tabel 2** juga menunjukkan bahwa ODE45 menunjukkan hasil berbeda diantara metode numerik lainnya. Hal ini dapat diakibatkan ODE45 tidak dapat menggambarkan kondisi *stiffness*. Selanjutnya, untuk kasus $\mu = 10$, $\mu = 100$, dan $\mu = 200$ dapat saja dipengaruhi oleh kondisi *stiffness* yang cukup signifikan, sehingga untuk ketiga nilai μ digunakan ukuran langkah yang cukup kecil ($h = 10^{-3}$, dan 10^{-4}).

Dari **Tabel 3** hingga **Tabel 5**, penyelesaian persamaan VDP dengan metode BBDF memberikan solusi konsisten pada nilai ujung interval $u(t)$. Hasil yang diperoleh dengan BBDF baik 2-point BBDF maupun 3-point BBDF selalu konsisten khususnya pada $\mu = 10$. Untuk nilai $\mu = 100$ dan $\mu = 200$, BBDF juga konsisten pada langkah yang diperhalus. Hal ini menunjukkan akurasi BBDF semakin tinggi pada nilai μ yang besar jika ukuran langkah diperkecil, sehingga efek *stiffness* dapat diatasi. Pada nilai μ tertentu, hasil BBDF dekat atau sama dengan hasil ODE15s dan terkadang hasilnya dekat atau sama dengan hasil ODE45. Hal ini menunjukkan bahwa ODE15s dan ODE45 tidak selalu dapat menggambarkan fenomena *stiffness* pada semua kondisi μ . Dari uraian di atas menunjukkan bahwa BBDF memiliki kemampuan yang baik dalam menggambarkan atau menemukan solusi numerik persamaan VDP.

Tabel 3. Nilai dari $u(t)$ pada ujung interval ($t = 100$) untuk $\mu = 10$

Ukuran langkah	Metode	$u(t)$
10^{-3}	ODE45	1.6458
	ODE15s	1.6428
	2-point BBDF	1.6309
	3-point BBDF	1.6409

10^{-4}	ODE45	1.6458
	ODE15s	1.6428
	2-point BBDF	1.6409
	3-point BBDF	1.6409

Tabel 4. Nilai dari $u(t)$ pada ujung interval ($t = 200$) untuk $\mu = 100$

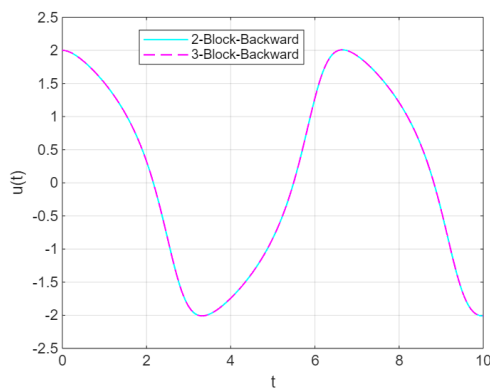
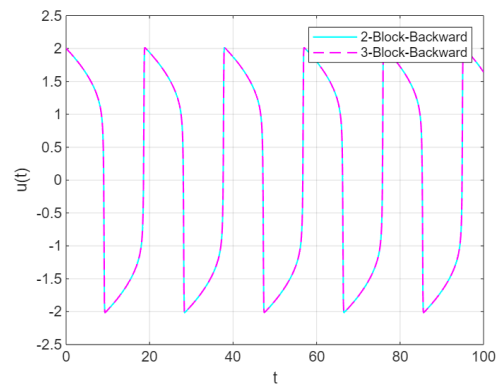
Ukuran langkah	Metode	$u(t)$
10^{-3}	ODE45	1.7199
	ODE15s	1.7165
	2-point BBDF	1.7180
	3-point BBDF	1.7186
10^{-4}	ODE45	1.7199
	ODE15s	1.7165
	2-point BBDF	1.7186
	3-point BBDF	1.7186

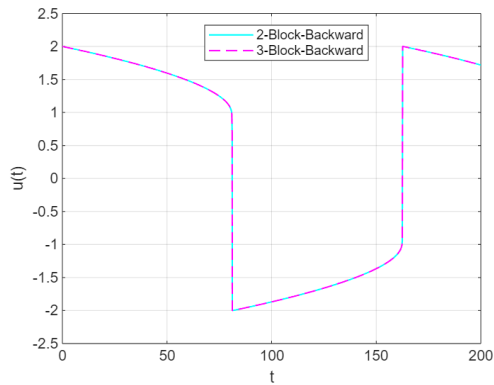
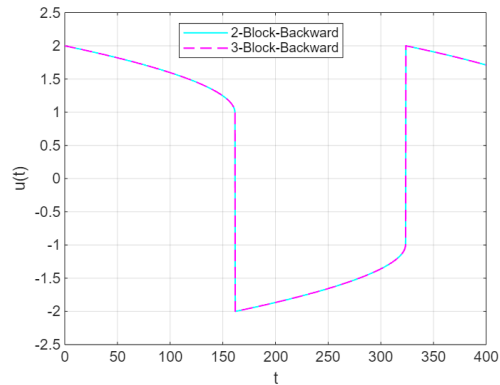
Tabel 5. Nilai dari $u(t)$ pada ujung interval ($t = 400$) untuk $\mu = 200$

Ukuran langkah	Metode	$u(t)$
10^{-3}	ODE45	1.7132
	ODE15s	1.7102
	2-point BBDF	1.7066
	3-point BBDF	1.7106
10^{-4}	ODE45	1.7132
	ODE15s	1.7102
	2-point BBDF	1.7108
	3-point BBDF	1.7108

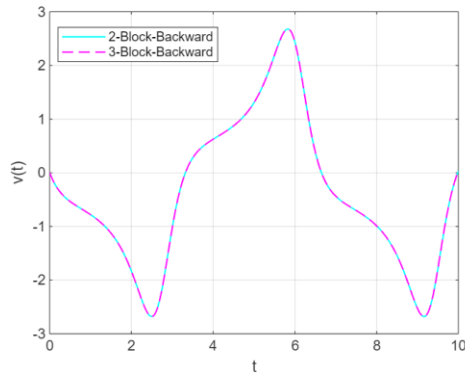
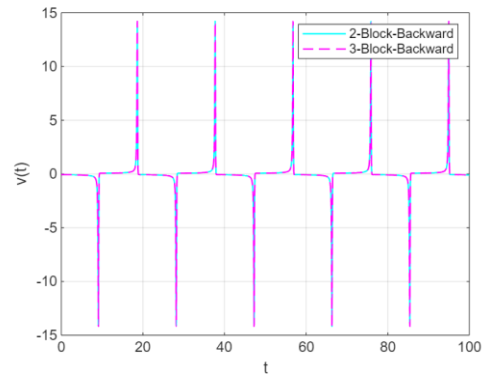
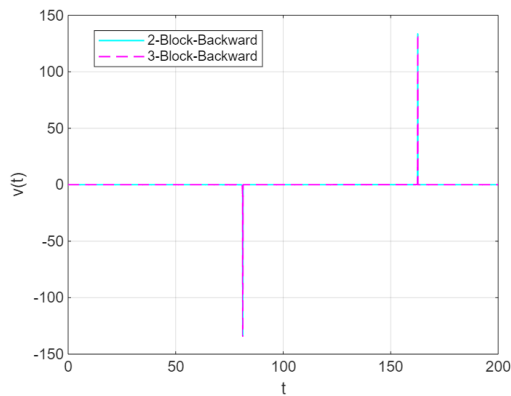
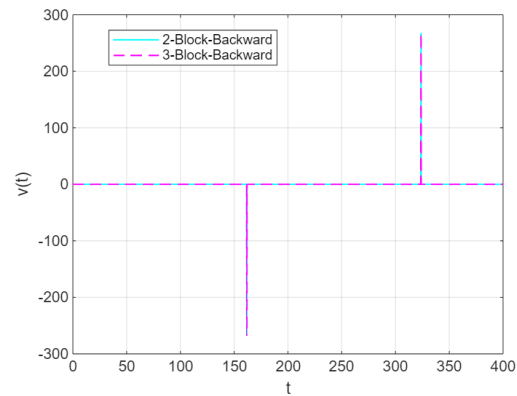
3.5 Visualisasi Hasil Persamaan VDP menggunakan metode BBDF

Visualisasi hasil numerik persamaan VDP menggunakan metode BBDF diberikan pada **Gambar 1** hingga **Gambar 3** untuk beberapa variasi nilai μ dan ukuran langkah $h = 10^{-4}$.

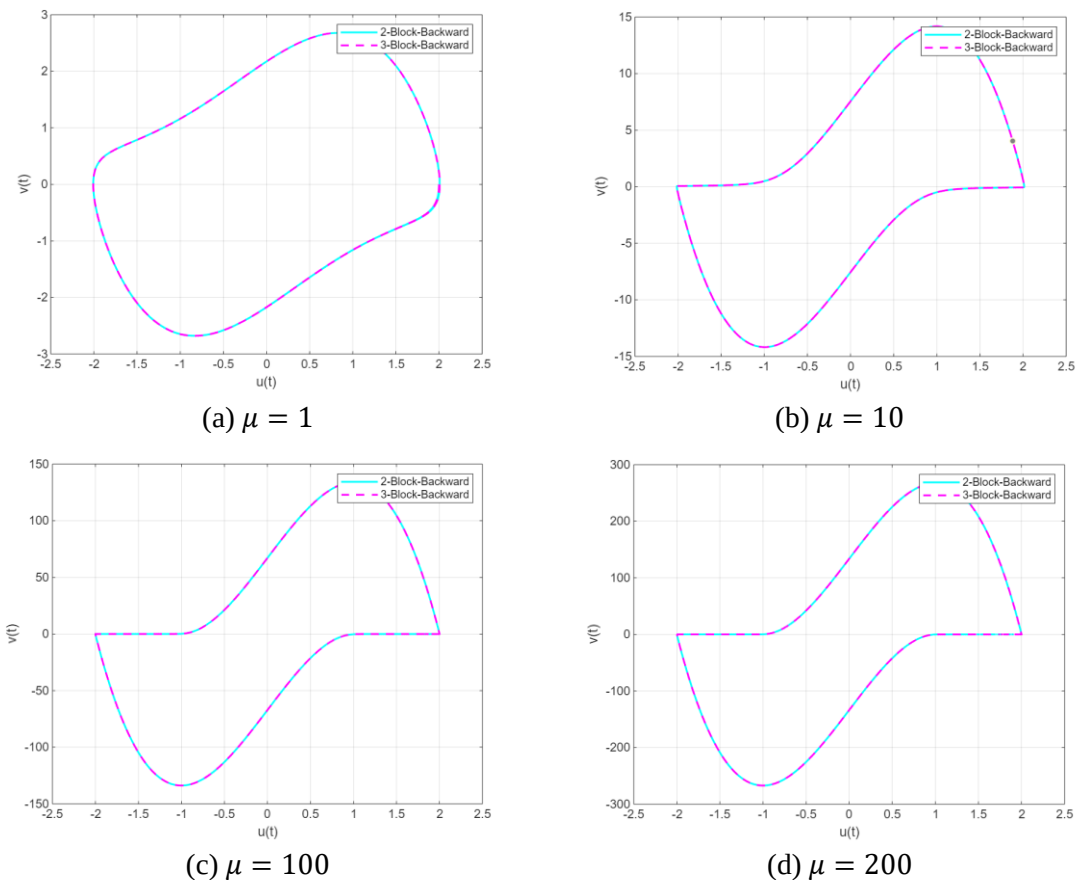
(a) $\mu = 1$ (b) $\mu = 10$

(c) $\mu = 100$ (d) $\mu = 200$

Gambar 1. Grafik solusi persamaan VDP dengan BBDF untuk t dan $u(t)$ dengan variasi nilai μ pada ukuran langkah $h = 10^{-4}$.

(a) $\mu = 1$ (b) $\mu = 10$ (c) $\mu = 100$ (d) $\mu = 200$

Gambar 2. Grafik solusi persamaan VDP dengan BBDF untuk t dan $v(t)$ dengan variasi nilai μ pada ukuran langkah $h = 10^{-4}$.



Gambar 3. Grafik solusi persamaan VDP dengan BBDF untuk $u(t)$ dan $v(t)$ dengan variasi nilai μ pada ukuran langkah $h = 10^{-4}$.

Berdasarkan **Gambar 1** dan **Gambar 2**, baik *2-point* BBDF maupun *3-point* BBDF menunjukkan performa yang sangat baik dalam menangani kondisi *stiffness* pada persamaan VDP, khususnya untuk nilai parameter μ yang besar ($\mu = 100$ dan $\mu = 200$). Grafik solusi memperlihatkan bahwa sistem dengan μ besar menghasilkan osilasi yang sangat curam diikuti oleh relaksasi yang halus. Hal tersebut merupakan ciri khas sistem *stiff*. Meskipun demikian, penggunaan ukuran langkah kecil ($h = 10^{-4}$) dan metode BBDF berhasil mempertahankan stabilitas numerik sekaligus akurasi tinggi, sebagaimana terkonfirmasi pada **Tabel 1** serta kesesuaian hasil numerik dengan ODE15s dan ODE45 pada **Tabel 2** hingga **Tabel 5**.

Selain itu, **Gambar 3** merepresentasikan dinamika sistem melalui potret fase (*phase portrait*), dimana terlihat untuk $\mu = 1$, *limit cycle* yang halus dan simetris menunjukkan pola osilasi teratur. Pada $\mu = 10$, distorsi awal *limit cycle* mengindikasikan munculnya kondisi *stiffness*, serta pada $\mu \geq 100$ karakteristik *stiffness* tampak jelas dengan adanya transisi curam dan relaksasi panjang dalam potret fase.

4. Kesimpulan

Penerapan metode BBDF pada pencarian solusi numerik persamaan VDP telah dilakukan. Reduksi orde persamaan VDP dari orde dua menjadi sistem PDB orde satu dilakukan agar metode BBDF dapat diterapkan. Penelitian telah dilakukan pada beberapa variasi nilai μ , dan khusus kasus $\mu = 0$ menjadikan VDP dalam bentuk persamaan osilasi sederhana sehingga BBDF memberikan hasil dengan RMSE yang lebih kecil dibandingkan hasil yang diberikan oleh ODE15s dan ODE45. Analisis kestabilan metode BBDF pada persamaan VDP menunjukkan bahwa kondisi selalu stabil untuk setiap pemilihan h dan μ , tetapi untuk keakurasian nilai h diambil semakin kecil pada μ yang semakin besar. Metode BBDF terbukti efektif dalam menyelesaikan persamaan VDP untuk berbagai nilai parameter μ , meskipun metode ini memerlukan ukuran langkah yang lebih kecil untuk mencapai konvergensi pada nilai μ yang lebih tinggi.

5. Daftar Pustaka

- [1] Abasi, N., Suleiman, M., Abbasi, N. & Musa, H., 2014. 2-point block BDF method with off-step points for solving stiff ODEs. *Journal of Soft Computing and Applications*, Vol. 2014, 1-15.
- [2] Asnor, A., I., Yatim, S., A., M., Ibrahim, Z., B., & Zainuddin, N., 2021. High Order Block Method for Third Order ODEs. *Computers, Materials & Continua*, Vol. 67, No. 1, 1253-1267.
- [3] Bakari, I., A., Babuba, S., Tumba, P. & Danladi, A., 2020. Two-step hybrid block backward differentiation formulae for the solution of stiff ordinary differential equations. *FUDMA Journal of Sciences*, Vol. 4, No. 1, 668-676.
- [4] Fadlynurullahasedee, A., Sathar, M.H.A., Ijam, H.M., Othman, K.I., Ishak, N., Hamzah, S.R. & Jamaludin, N., 2018. A Backward Difference Formulation for Solving Doffing-Van Der Pol Type Oscillators. *International Journal of Engineering & Technology*, Vol. 7, No. 4, 19, 36-39.
- [5] Febrianti, W., Sidarto, K.A. & Sumarti, N., 2022, December. An Approximate Optimization Method for Solving Stiff Ordinary Differential Equations With Combinational Mutation Strategy of Differential Evolution Algorithm. In *MENDEL*, Vol. 28, No. 2, 54-61.
- [6] He, L., Yi, L. & Tang, P., 2016. Numerical scheme and dynamic analysis for variable-order fractional van der Pol model of nonlinear economic cycle. *Advances in Difference Equations*, Vol. 2016, 1-11.
- [7] Ibrahim, Z., B., Othman, K., I. & Suleiman, M., 2007. Implicit r-point block backward differentiation formula for solving first-order stiff ODEs. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 186, No. 1, 558-565.
- [8] Ibrahim, Z., B., Mohd Noor, N. & Othman, K., I., 2019. Fixed coefficient A (α) stable block backward differentiation formulas for stiff ordinary differential equations. *Symmetry*, Vol. 11, No. 7, 846.
- [9] Mishra, V., Das, S., Jafari, H. & Ong, S.H., 2016. Study of fractional order Van der Pol equation. *Journal of King Saud University-Science*, Vol. 28, No. 1, 55-60.
- [10] Mungkasi, S. & Widjaja, D., 2021. A numerical-analytical iterative method for solving an electrical oscillator equation. *TELKOMNIKA (Telecommunication Computing Electronics and Control)*, Vol. 19, No. 4, 1218-1225.
- [11] Na'imah, F., Yulida, Y. & Karim, M.A., 2021. Pembentukan Persamaan Van der Pol dan Solusi Menggunakan Metode Multiple Scale. *EPSILON: Jurnal Matematika Murni dan Terapan (EPSILON: Journal of Pure and Applied Mathematics)*, Vol. 14, No. 2, 104-114.
- [12] Nasir, N., A., A., M., Ibrahim, Z., B., Suleiman, M., Othman, K., I. & Rahim, Y., F., 2012. Numerical solution of tumor-immune interaction using 2-point block backward differentiation

- method. In *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, Vol. 9, 278-284. World Scientific Publishing Company.
- [13] Ramana, P., V. & Prasad, B., R., 2014. Modified Adomian decomposition method for Van der Pol equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 65, 121-132.
 - [14] Soomro, H., Zainuddin, N., Daud, H., Sunday, J., Jamaludin, N., Abdullah, A., Apriyanto, M. & Kadir, E.A., 2022. Variable step block hybrid method for stiff chemical kinetics problems. *Applied Sciences*, Vol 12, No. 9, 4484.
 - [15] Soomro, H., Zainuddin, N., Daud, H., Sunday, J., Jamaludin, N., Abdullah, A., Mulono, A. & Kadir, E.A., 2023. 3-Point block backward differentiation formula with an off-step point for the solutions of stiff chemical reaction problems. *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 61, No. 1, 75-97.
 - [16] Tjendro, T. & Mungkasi, S., 2019. Formal expansion method for solving an electrical circuit model. *TELKOMNIKA (Telecommunication Computing Electronics and Control)*, Vol. 17, No. 3, 1338-1343.
 - [17] Yulida, Y. & Karim, M.A., 2019. Analisa Kestabilan dan Solusi Pendekatan Pada Persamaan Van der Pol. *Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika*, Vol. 3, No. 2, 156-161.
 - [18] Zainuddin, N., Ibrahim, Z., B. & Zawawi, I., S., M., 2023. Diagonal block method for stiff van der pol equation. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, Vol. 53, No. 1, 1-8.
 - [19] Zawawi, I., S., M., Aris, H. & Jørgensen, B., N., 2020, March. Transient Analysis of Electrical Circuits using Block Backward Differentiation Formula. In *Proceedings of the 2020 The 9th International Conference on Informatics, Environment, Energy and Applications*, 99-103.