

## Prime Labeling of Special Graph Classes Constructed from Dutch Windmill Graphs

### Pelabelan Prima pada Kelas Graf Khusus yang Dikonstruksi dari Graf Kincir Angin Belanda

Jayanti Anggraini Putri Lestari<sup>1</sup>, Desi Rahmadani<sup>2\*</sup>

<sup>1,2</sup>*Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,  
Universitas Negeri Malang, Malang, Indonesia*

*Email*: <sup>1</sup>[jayanti.anggraini.2103126@students.um.ac.id](mailto:jayanti.anggraini.2103126@students.um.ac.id), <sup>2\*</sup>[desi.rahmadani.fmipa@um.ac.id](mailto:desi.rahmadani.fmipa@um.ac.id)

*\*Corresponding author*

#### Abstract

Let  $G$  be a simple graph of order  $n$ . Prime labeling is a bijective function  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  such that  $\gcd(f(u), f(v)) = 1$  for every pair of adjacent vertices  $u, v$  in  $G$ . A graph  $G$  that satisfies the definition of prime labeling is called a prime graph. The Dutch windmill graph  $D_r^n$  is a graph obtained by taking  $n$  copies of the cycle graph  $C_r$  with a vertex in common. The double quadrilateral graph  $DQ$  is a graph constructed from two copies of  $C_4$  and identifying one edge from each of them. The graph obtained by taking  $n$  copies of  $DQ$  and identifying one vertex of degree 3 from each of them as a common central vertex is called the double quadrilateral Dutch windmill graph  $DQ_n$ , for  $n \geq 1$ . Furthermore, graphs  $D_r^n$  and  $DQ_n$  becomes the base graph to construct two new graph classes, namely graph  $P_2[D_r^n]$  and flower double quadrilateral graph  $FDQ_n$ . Both graph classes, constructed from the Dutch windmill graph, also contain even cycles. From previous research, it is known that graphs  $P_2[D_4^n]$  and flower double quadrilateral graph  $FDQ_n$  have odd harmonious labeling. However, the determination of prime labeling on both of the classes is still an open problem. In this paper, we show that two classes of graphs constructed from Dutch windmill graphs with even cycles, namely graphs  $P_2[D_4^n]$  and flower double quadrilateral graphs  $FDQ_n$  for  $n \geq 1$  have a prime labeling. The result of this research shows that these graphs are prime graphs.

**Keywords:** Prime labeling, Windmill graph, Classes of Dutch windmill graph

#### Abstrak

Misalkan  $G$  adalah graf sederhana berorde  $n$ . Pelabelan prima merupakan fungsi bijektif  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , sedemikian sehingga  $\gcd(f(u), f(v)) = 1$  untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  yang bertetangga di  $G$ . Graf  $G$  yang memenuhi definisi pelabelan prima disebut graf prima. Graf kincir angin Belanda  $D_r^n$  merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil  $n$  salinan graf sikel  $C_r$  dengan satu simpul persekutuan. Graf *double quadrilateral*, dinotasikan  $DQ$ , adalah graf



yang diperoleh dari dua graf  $C_4$  dengan mengidentifikasi satu sisi dari masing-masing graf  $C_4$ . Graf yang diperoleh dengan mengambil  $n$  salinan  $DQ$  dan mengidentifikasi satu simpul berderajat 3 dari masing-masingnya sebagai titik pusat bersama disebut graf kincir angin Belanda *double quadrilateral*  $DQ_n$ , untuk  $n \geq 1$ . Selanjutnya, graf  $D_r^n$  dan  $DQ_n$  menjadi graf dasar untuk membangun dua kelas graf baru, yaitu graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf bunga *double quadrilateral*  $FDQ_n$ . Kedua kelas graf yang dibangun dari graf kincir angin Belanda tersebut juga memuat siklus genap. Dari penelitian sebelumnya diketahui bahwa graf  $P_2[D_4^n]$  dan graf bunga *double quadrilateral*  $FDQ_n$  memiliki pelabelan harmonis ganjil. Namun, penentuan pelabelan prima pada kedua kelas graf tersebut masih menjadi permasalahan terbuka. Pada artikel ini, ditunjukkan bahwa dua kelas graf yang dibangun dari graf kincir angin Belanda dengan siklus genap, yakni graf  $P_2[D_4^n]$  dan graf bunga *double quadrilateral*  $FDQ_n$  untuk  $n \geq 1$  memiliki pelabelan prima. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa graf-graf tersebut merupakan graf prima.

**Kata kunci:** Pelabelan prima, Graf kincir angin, Kelas graf kincir angin Belanda

## 1. PENDAHULUAN

Sebuah graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$  dimana  $V$  merupakan himpunan tak kosong dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tak terurut elemen-elemen di  $V$ . Elemen-elemen di  $V$  disebut simpul-simpul dari  $G$  dan elemen-elemen di  $E$  disebut sisi-sisi dari  $G$ . Biasanya, notasi  $V(G)$  digunakan untuk menyatakan himpunan simpul dari  $G$  dan  $E(G)$  menyatakan himpunan sisi dari  $G$  [9].

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  dikatakan injektif (*one-to-one*) jika  $x_1 \neq x_2$  maka  $f(x_1) \neq f(x_2)$  sehingga  $f$  injektif. Fungsi dikatakan surjektif (*onto*) adalah untuk sebarang  $b \in B$  terdapat setidaknya satu  $x \in A$ , sedemikian sehingga  $f(x) = b$ . Fungsi  $f: A \rightarrow B$  dikatakan bijektif jika  $f$  memenuhi keduanya yaitu fungsi injektif dan surjektif [2].

### **Teorema 1.1** [11]

- Misal  $A$  dan  $B$  merupakan sebarang dua himpunan berhingga dengan  $|A| = |B| = n$ , maka fungsi  $f: A \rightarrow B$  adalah injektif jika dan hanya jika  $f$  adalah surjektif.
- Dua himpunan berhingga memiliki kardinalitas yang sama jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif di antara keduanya.

*Greatest common divisor* atau *gcd* dari bilangan bulat  $a$  dan  $b$  dengan  $a, b \neq 0$  dinotasikan dengan  $\gcd(a, b)$  merupakan bilangan bulat terbesar yang dapat membagi kedua bilangan  $a$  dan  $b$ . Bilangan bulat  $a$  dan  $b$  dengan  $a, b \neq 0$  adalah relatif prima jika  $a$  dan  $b$  memiliki  $\gcd(a, b) = 1$  ( $a$  dan  $b$  tidak memiliki pembagi bersama selain 1) [14].

**Teorema 1.2** [13] Jika  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan bulat konsekutif demikian sehingga  $a = n$  dan  $b = n + 1$  dimana  $n$  adalah bilangan bulat, maka  $a$  dan  $b$  relatif prima.

Pelabelan graf merupakan pemberian label dari elemen suatu himpunan kepada elemen pada graf  $G$ , biasanya pada sisi, simpul, atau keduanya. Konsep pelabelan prima diperkenalkan pertama kali oleh Entringer sekitar tahun 1980. Misalkan  $G$  graf berorde  $n$  (memiliki  $n$  simpul) dengan himpunan simpul  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ , pelabelan prima pada graf  $G$  adalah pelabelan simpul dari  $G$  dengan bilangan bulat berbeda dari himpunan  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  sedemikian sehingga label-label dari setiap dua simpul yang bertetangga dari  $G$  adalah relatif prima. Dengan kata lain, pelabelan prima merupakan fungsi bijektif  $f: V(G) \rightarrow [n]$  demikian sehingga  $\gcd(f(u), f(v)) = 1$  untuk setiap pasang  $u, v$  dari simpul yang bertetangga pada graf  $G$ . Graf yang memenuhi pelabelan

prima maka disebut dengan graf prima [3]. Menurut Chartrand [3], semua graf *cycle*  $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  untuk  $n \geq 3$  merupakan graf prima.

Pada tahun 2024 Abughazaleh & Abughneim [1] mengkaji pelabelan prima pada graf yang dikonstruksi dari graf roda  $W_{m_1}$ ,  $W_{m_2}$ , dan graf lintasan  $P_{m_3}$ . Selanjutnya, Ganesan dkk. [8], telah membuktikan bahwa graf *triangular book*  $B_n = K_2 + \overline{K_t}$  dan graf *cycle-cactus*  $C_k^{(n)}$  yang merupakan  $n$  copies dari graf  $C_k$  dengan satu titik pusat. Meena [12] menentukan pelabelan prima dari graf *friendship*  $T_n$ . Pada tahun 2024, Irene dkk. [10] mengkaji terkait graf kincir angin yaitu pelabelan total super  $(a, d) - C_3 - antimagic$  untuk graf kincir angin Belanda  $D_3^m$ .

Beberapa penelitian dari Firmansah akan menjadi dasar untuk mengkonstruksi graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diantaranya, Firmansah dkk. pada tahun 2016 [6] menentukan pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^k$ . Selanjutnya, pada tahun 2018 Firmansah dkk. [5] menentukan pelabelan harmonis ganjil pada graf hasil amalgamasi kincir angin Belanda  $C_4^{(k)} * P_2 * C_4^{(k)}$ . Kemudian, dilanjutkan pada tahun 2020 Firmansah [4] melanjutkan penelitian untuk menentukan pelabelan harmonis ganjil pada graf bunga *double quadrilateral*  $FDQ_{(m)}$ .

Graf kincir angin dinotasikan sebagai graf  $K_r^n$  dengan  $r > 3$  yang terdiri dari  $n$  copies dari graf lengkap  $K_r$  dengan satu simpul pusat yang sama. Graf kincir angin  $K_3^n$  merupakan graf *friendship* diperumum  $F_3^n$  sehingga graf kincir angin dimulai dengan  $r > 3$ . Graf kincir angin Belanda atau yang dinotasikan dengan  $D_r^n$  merupakan graf yang terdiri dari  $n$  copy graf sikel  $C_r$  dengan satu simpul persekutuan [7].

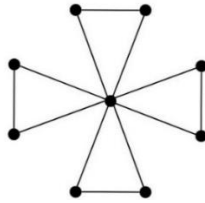
Pelabelan prima merupakan pelabelan graf yang penting untuk dikerjakan dan dikaji lebih lanjut karena memiliki potensi yang dapat digunakan dalam banyak bidang ilmu. Banyak penelitian telah dilakukan untuk berbagai kelas dan struktur graf dengan pelabelan yang berbeda, akan tetapi hingga saat ini penentuan pelabelan prima untuk kedua kelas graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  masih menjadi masalah terbuka. Oleh karena itu, pada artikel ini akan ditunjukkan bahwa graf  $P_2[D_r^n]$  untuk  $r = 4$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  untuk  $n \geq 1$  mempunyai pelabelan prima.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dan eksplorasi. Langkah pertama yang dilakukan adalah mempelajari berbagai sumber informasi seperti buku, jurnal ilmiah, artikel, dan hasil penelitian sebelumnya yang membahas tentang pelabelan graf, khususnya pelabelan prima. Selanjutnya, menentukan graf yang akan diteliti dengan graf kincir angin Belanda sebagai dasar untuk mengkonstruksi dua kelas graf baru yaitu graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  yang memuat sikel genap. Tahapan selanjutnya adalah melakukan eksplorasi terhadap pelabelan prima pada graf-graf tersebut. Peneliti secara khusus memfokuskan pada dua kelas graf baru dari graf kincir angin Belanda yaitu graf  $P_2[D_r^n]$  untuk  $r = 4$  dan graf  $FDQ_n$  untuk setiap  $n \geq 1$ . Eksplorasi ini dimulai dengan menentukan pelabelan prima pada graf  $P_2[D_4^n]$  untuk kasus sederhana  $n = 1, 2, 3, \dots, 7$  dan graf  $FDQ_n$  untuk  $n = 1, 2, 3 \dots 6$ . Setelah penentuan pelabelan prima untuk beberapa  $n$  tersebut dilakukan, selanjutnya dirumuskan pelabelan prima pada graf  $P_2[D_4^n]$  dan  $FDQ_n$  untuk setiap  $n \geq 1$  dan dibuktikan kebenarannya secara matematis.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

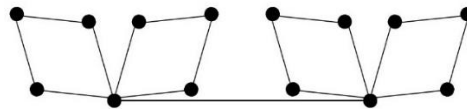
Firmansah dkk. [4–6] telah mengkaji penentuan pelabelan harmonis ganjil pada beberapa kelas graf yang dikonstruksi dari graf kincir angin Belanda. Sebagai ilustrasi, graf kincir angin Belanda  $D_3^4$  ditunjukkan seperti pada Gambar 3.1.

Gambar 3.1. Graf Kincir Angin Belanda  $D_3^4$ 

Pada bagian ini, pertama-tama diberikan definisi dua kelas graf baru yang dikonstruksi dari modifikasi graf kincir angin Belanda dengan siklus genap yaitu graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  seperti pada Definisi 3.1 dan Definisi 3.2 berikut.

**Definisi 3.1.** Graf  $P_2[D_r^n]$  adalah graf yang diperoleh dari lintasan  $P_2$  dengan setiap simpul pada  $P_2$  diganti dengan graf  $D_r^n$  untuk  $r \geq 3$  dan  $n \geq 1$ .

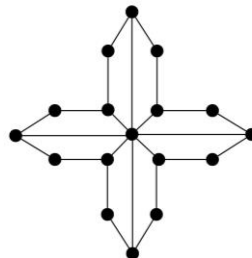
Sebagai ilustrasi diberikan graf  $P_2[D_4^2]$  seperti pada Gambar 3.2.

Gambar 3.2. Graf  $P_2[D_4^2]$ 

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari graf *double quadrilateral*  $DQ$  dan graf kincir angin Belanda *double quadrilateral*  $DQ_n$  yang dirujuk dari artikel Firmansah dkk. [6] dengan beberapa modifikasi. Graf *double quadrilateral*  $DQ$  adalah graf yang diperoleh dari dua graf  $C_4$  dengan mengidentifikasi satu sisi dari masing-masing  $C_4$ . Selanjutnya akan didefinisikan graf kincir angin Belanda *double quadrilateral*  $DQ_n$ . Graf kincir angin Belanda *double quadrilateral*  $DQ_n$ , untuk  $n \geq 1$  adalah graf yang dibentuk dari  $n$  graf  $DQ$  dengan menempelkan satu simpul dari masing-masing graf  $DQ$  sehingga menghasilkan satu simpul pusat. Kelas graf yang kedua adalah graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  yang definisinya diberikan seperti pada Definisi 3.2 berikut.

**Definisi 3.2.** Graf  $FDQ_n$  merupakan graf yang diperoleh dari graf kincir angin Belanda  $DQ_n$  dengan menempelkan satu sisi dari dua graf  $DQ$  yang bertetangga (berdekatan).

Sebagai ilustrasi diberikan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_4$  seperti pada Gambar 3.3.

Gambar 3.3. Contoh graf  $FDQ_4$ 

Selanjutnya, akan dibuktikan secara matematis bahwa dua kelas graf modifikasi dari graf kincir angin Belanda yaitu graf  $P_2[D_r^n]$  untuk dan graf  $FDQ_n$  untuk  $n \geq 1$  adalah graf prima. Pertama-

tama, akan dibuktikan bahwa graf  $P_2[D_4^n]$  untuk  $n \geq 1$  memiliki pelabelan prima seperti yang diberikan pada Teorema 3.3 berikut.

**Teorema 3.3.** *Graf  $P_2[D_4^n]$  dengan  $n \geq 1$  adalah graf prima.*

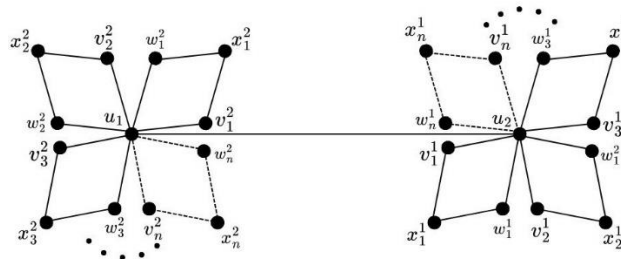
**Bukti.** Misalkan graf  $P_2[D_4^n]$  yang diberikan seperti pada Gambar 3.4. merupakan graf yang memiliki himpunan simpul:

$$V(P_2[D_4^n]) = \{u_m, v_i^m, w_i^m, x_i^m | i = 1, 2, 3, \dots, n; m = 1, 2\}$$

Sehingga total banyak simpul  $|V(P_2[D_4^n])| = 6n + 2$ .

Misalkan  $P_2[D_4^n]$  adalah graf yang memiliki himpunan sisi:

$$E(P_2[D_4^n]) = \{u_1 u_2, u_1 v_i^2, u_1 w_i^2, v_i^2 x_i^2, w_i^2 x_i^2, u_2 v_i^1, u_2 w_i^1, v_i^1 x_i^1, w_i^1 x_i^1 | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$



Gambar 3.4. Graf  $P_2[D_4^n]$

Graf  $P_2[D_4^n]$  memiliki pelabelan simpul berupa  $f: V(P_2[D_4^n]) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n + 2\}$  sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} f(u_i) &= i, \text{ untuk } i = 1, 2 \\ f(v_i^1) &= 6i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(x_i^1) &= 6i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(w_i^1) &= 6i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(v_i^2) &= 6i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(x_i^2) &= 6i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(w_i^2) &= 6i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.1)$$

Berdasarkan (3.1) maka diperoleh,

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 1 \\ f(u_2) &= 2 \\ \{f(v_i^1) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{3, 9, 15, 21, \dots, 6n - 3\} \\ \{f(w_i^1) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{5, 11, 17, 23, \dots, 6n - 1\} \\ \{f(x_i^1) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{4, 10, 16, 22, \dots, 6n - 2\} \\ \{f(v_i^2) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{6, 12, 18, 24, \dots, 6n\} \\ \{f(w_i^2) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{8, 14, 20, 26, \dots, 6n + 2\} \\ \{f(x_i^2) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{7, 13, 19, 25, \dots, 6n + 1\} \end{aligned}$$

Jika  $a \neq b$  dengan  $a, b \in \{u_1, u_2, v_i^1, w_i^1, x_i^1, v_i^2, w_i^2, x_i^2\}$  maka  $f(a) \neq f(b)$ . Sehingga terbukti bahwa  $f: V(P_2[D_4^n]) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n + 2\}$  adalah fungsi injektif. Berdasarkan Teorema 1.1, karena  $|V(P_2[D_4^n])| = 6n + 2 = |\{1, 2, 3, \dots, 6n + 2\}|$  dan  $f$  adalah injektif maka  $f: V(P_2[D_4^n]) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n + 2\}$  adalah fungsi bijektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  yang bertetangga pada graf  $P_2[D_4^n]$  dengan  $n \geq 1$  adalah relatif prima yaitu  $\gcd(f(u), f(v)) = 1$ . Misalkan  $f(u) = a$  dan  $f(v) = b$ . Akan dibuktikan  $\gcd(a, b) = 1$  sebagai berikut:

**Kasus 1:**

Untuk semua simpul yang bertetangga dengan simpul  $u_1$  dengan  $f(u_1) = a = 1$ , maka  $\gcd(f(u_1), b) = \gcd(a, b) = 1$ , dengan  $b$  merupakan setiap simpul yang bertetangga dengan  $f(u_1)$ .

**Kasus 2:**

Untuk semua simpul yang bertetangga dengan simpul  $u_2$ , yaitu simpul  $v_i^1$  dan  $w_i^1$  untuk  $1 \leq i \leq n$ , karena  $f(u_2) = 2$ ,  $f(v_i^1) = 6i - 3$  (bilangan ganjil), dan  $f(w_i^1) = 6i - 1$  (bilangan ganjil), maka  $\gcd(f(u_2), f(v_i^1)) = \gcd(f(u_2), f(w_i^1)) = 1$ .

**Kasus 3:**

$$\begin{aligned} \text{a. Dua simpul yang bertetangga yaitu } v_i^1 \text{ dan } x_i^1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ f(v_i^1) = 6i - 3 \\ f(x_i^1) = 6i - 2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{b. Dua simpul yang bertetangga yaitu } x_i^1 \text{ dan } w_i^1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ f(x_i^1) = 6i - 2 \\ f(w_i^1) = 6i - 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Karena persamaan (3.2) dan (3.3) memberikan dua bilangan bulat yang konsekutif, berdasarkan Teorema 1.2 maka label dari simpul tersebut adalah relatif prima.

**Kasus 4:**

$$\begin{aligned} \text{a. Dua simpul yang bertetangga yaitu } v_i^2 \text{ dan } x_i^2 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ f(v_i^2) = 6i \\ f(x_i^2) = 6i + 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{b. Dua simpul yang bertetangga yaitu } x_i^2 \text{ dan } w_i^2 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ f(x_i^2) = 6i + 1 \\ f(w_i^2) = 6i + 2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Karena persamaan (3.4) dan (3.5) memberikan dua bilangan bulat yang konsekutif, berdasarkan Teorema 1.2 maka label dari simpul tersebut adalah relatif prima.

Berdasarkan kasus 1, 2, 3, dan 4, maka terbukti bahwa untuk setiap dua simpul bertetangga merupakan relatif prima. Sehingga, untuk setiap dua simpul bertetangga  $u$  dan  $v$  memenuhi  $\gcd(f(u), f(v)) = 1$  atau relatif prima, sehingga graf  $P_2[D_4^n]$  dengan  $n \geq 1$  dapat disebut graf prima.

Selanjutnya, dibuktikan bahwa kelas graf  $FDQ_n$  dengan  $n \geq 1$  memiliki pelabelan prima seperti yang diberikan pada Teorema 3.4 berikut.

**Teorema 3.4.** *Graf  $FDQ_n$  dengan  $n \geq 1$  merupakan graf prima.*

**Bukti.** Misalkan  $FDQ_n$  seperti pada Gambar 3.5. merupakan graf yang memiliki himpunan simpul:

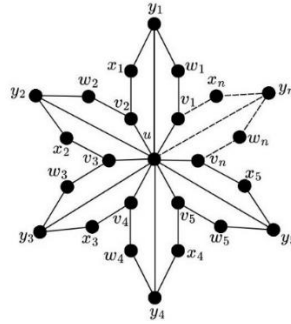
$$V(FDQ_n) = \{u, v_i, w_i, x_i, y_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Sehingga total banyak simpul  $|V(FDQ_n)| = 4n + 1$

Misalkan  $FDQ_n$  adalah graf yang memiliki himpunan sisi:

$$E(FDQ_n) = \{uv_i, v_iw_i, v_{i+1}x_i, w_iy_i, x_iy_i, uy_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Sehingga total banyak sisi  $|E(FDQ_n)| = 6n$ .

Gambar 3.5. Graf  $FDQ_n$ 

Graf  $FDQ_n$  memiliki pelabelan simpul berupa  $f: V(FDQ_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$  sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} f(u) &= 1 \\ f(v_i) &= 4n - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(w_i) &= 4n - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(x_i) &= 4n + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(y_i) &= 4n, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.6)$$

Berdasarkan (3.6) maka diperoleh,

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 1 \\ \{f(v_i) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{2, 6, 10, 14, \dots, 4n - 2\} \\ \{f(w_i) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{3, 7, 11, 15, \dots, 4n - 1\} \\ \{f(x_i) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{5, 9, 13, 17, \dots, 4n + 1\} \\ \{f(y_i) | i = 1, 2, 3, \dots, n\} &= \{4, 8, 12, 16, \dots, 4n\} \end{aligned}$$

Jika  $a \neq b$  dengan  $a, b \in \{u_1, v_i, w_i, x_i, y_i\}$  maka  $f(a) \neq f(b)$ . Sehingga, terbukti bahwa  $f: V(FDQ_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$  adalah fungsi injektif. Berdasarkan Teorema 1.1, karena  $|V(FDQ_n)| = 4n + 1$  dan  $|\{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}| = 4n + 1$  serta  $f$  adalah injektif maka  $f: V(FDQ_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$  adalah fungsi bijektif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  yang bertetangga pada graf  $FDQ_n$  dengan  $n \geq 1$  adalah relatif prima yaitu  $\gcd(f(u), f(v)) = 1$ . Misalkan  $f(u) = a$  dan  $f(v) = b$ . Akan dibuktikan  $\gcd(a, b) = 1$  sebagai berikut:

**Kasus 1:**

Untuk semua simpul yang bertetangga dengan simpul  $u$  karena  $f(u) = a = 1$ , maka  $\gcd(f(u), b) = \gcd(a, b) = 1$ , dengan  $b$  merupakan setiap simpul yang bertetangga dengan  $f(u)$ .

**Kasus 2:**

- a. Dua simpul yang bertetangga yaitu  $v_i$  dan  $w_i$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} f(v_i) &= 4i - 2 \\ f(w_i) &= 4i - 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

- b. Dua simpul yang bertetangga yaitu  $w_i$  dan  $y_i$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} f(w_i) &= 4i - 1 \\ f(y_i) &= 4i \end{aligned} \quad (3.8)$$

Karena persamaan (3.7) dan (3.8) memberikan dua bilangan bulat yang konsekutif, berdasarkan Teorema 1.2 maka label dari simpul tersebut adalah relatif prima.

**Kasus 3:**

- a. Dua simpul yang bertetangga yaitu  $y_i$  dan  $x_i$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} f(y_i) &= 4i \\ f(x_i) &= 4i + 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

b. Dua simpul yang bertetangga yaitu  $x_i$  dan  $v_{i+1}$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 4i + 1 \\ f(v_{i+1}) &= 4i + 2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Karena persamaan (3.9) dan (3.10) memberikan dua bilangan bulat yang konsekutif, berdasarkan Teorema 1.2 maka label dari simpul tersebut adalah relatif prima.

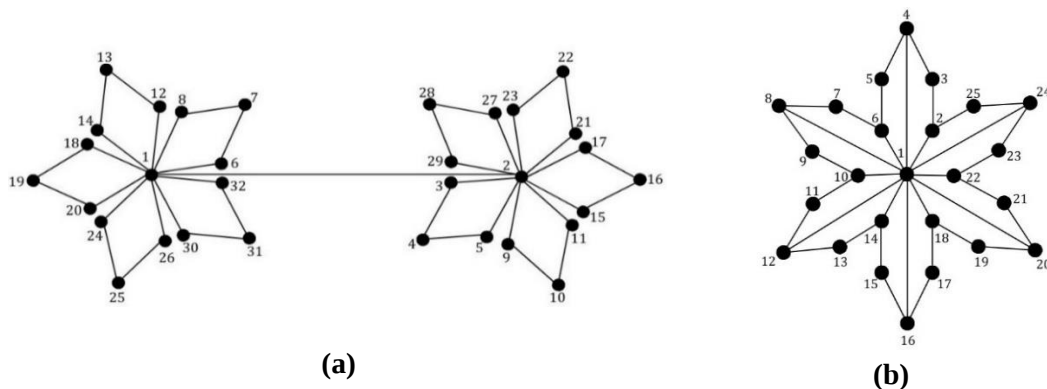
**Kasus 4:**

Dua simpul bertetangga  $v_1$  dan  $x_n$  atau sisi  $v_1x_n$  dengan  $f(v_1) = 2$  dan  $f(x_n) = 4n + 1$  (bilangan ganjil), maka  $\gcd(f(v_1), f(x_n)) = \gcd(2, 4n + 1) = 1$ .

Berdasarkan kasus 1, 2, 3, dan 4, maka terbukti bahwa untuk setiap dua simpul bertetangga merupakan relatif prima. Sehingga, untuk setiap dua simpul bertetangga  $u$  dan  $v$  memenuhi  $\gcd(f(u), f(v)) = 1$  atau relatif prima, sehingga graf  $FDQ_n$  dengan  $n \geq 1$  dapat disebut graf prima.

Berdasarkan Teorema 3.3 dan 3.4 terbukti bahwa dua kelas graf yang dikonstruksi dari kincir angin Belanda dengan siklus genap yakni graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  adalah graf prima. Pada penelitian sebelumnya, Firmansah dkk. telah mengkaji pelabelan harmonis ganjil pada tiga kelas graf dikonstruksi dari graf kincir angin Belanda dengan siklus genap yakni graf bunga *double quadrilateral*  $FDQ_m$  [4] dan graf  $C_4^{(k)} * P_2 * C_4^{(k)}$  (pada artikel ini dinotasikan dengan  $P_2[D_r^n]$ ) [5], dan graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^k$  [6]. Pada pelabelan harmonis ganjil, pelabelan pada simpul bersifat injektif, sedangkan pada pelabelan prima, pelabelan pada simpul bersifat bijektif. Meskipun kedua jenis pelabelan ini memiliki syarat yang berbeda, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa dua kelas graf yang dikonstruksi dari graf kincir angin Belanda dengan siklus genap yakni graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf  $FDQ_n$  memenuhi kedua pelabelan tersebut.

Sebagai ilustrasi, diberikan pelabelan prima untuk graf  $P_2[D_4^5]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_6$  yang ditunjukkan pada Gambar 3.6.



**Gambar 3.6.** Pelabelan Prima pada (a). Graf  $P_2[D_4^5]$

(b). Graf  $FDQ_6$

Berdasarkan Gambar 3.6 dapat dilihat bahwa simpul-simpul pada graf  $P_2[D_r^5]$  dan graf  $FDQ_6$  dilabeli dengan bilangan 1 sampai dengan bilangan yang menyatakan banyak simpul pada graf tersebut, label setiap simpul berbeda dan label setiap dua simpul yang bertetangga relatif prima. Sehingga graf  $P_2[D_r^5]$  dan graf  $FDQ_6$  memiliki pelabelan prima atau disebut juga graf prima

#### 4. KESIMPULAN

Penelitian mengkaji pelabelan prima pada dua kelas graf yang dikonstruksi dari graf kincir angin Belanda dengan sikel genap yaitu graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$ . Hasil penelitian terdahulu [4–6] menunjukkan bahwa graf  $P_2[D_4^n]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  untuk  $n \geq 1$  memiliki pelabelan harmonis ganjil. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa selain memiliki pelabelan harmonis, dua kelas graf  $P_2[D_r^n]$  dan graf *flower double quadrilateral*  $FDQ_n$  juga memiliki pelabelan prima. Penelitian lebih lanjut adalah menentukan pelabelan prima pada graf  $P_2[D_r^n]$  untuk  $r > 4$ . Penelitian ini juga masih terbuka dan dapat dikembangkan untuk menentukan pelabelan prima pada kelas graf lainnya yang belum dilakukan pada penelitian terdahulu.

#### UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Universitas Negeri Malang melalui hibah Penelitian Internal UM Tahun 2025 Skema Bantuan Penelitian Skripsi.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abughazaleh, B., & Abughneim, O. A., 2024. Prime Labeling of Graphs Constructed from Wheel Graph. *Heliyon*, Vol. 10, No. 2.
- [2] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R., 2011. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition. John Wiley & Sons Inc.
- [3] Chartrand, G., Egan, C., & Zhang, P., 2019. *How to Label a Graph*. Springer Nature., Switzerland
- [4] Firmansah, F., 2020. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Bunga Double Quadrilateral. *Jurnal Ilmiah Sains*, Vol. 20, No. 1, 12-17.
- [5] Firmansah, F., & Syaifuddin, M. W., 2018. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Amalgamasi Graf Kincir Angin Belanda. *Fibonacci: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, Vol. 4, No. 1, 37–46.
- [6] Firmansah, F., Wahid, M., Prodi, S., & Matematika, P., 2016. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Double Quadrilateral. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*, 53-58.
- [7] Gallian, J. A., 2019. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS6.
- [8] Ganesan, V., Mahalakshmi, S., & Sathya, M. P., 2017. Prime Labeling of Triangular Book and Cycle-Cactus Graphs. Dalam *International Journal of Scientific Research and Modern Education (IJSRME)*, Vol. 2, No. 2, 16-20.
- [9] Hartsfield, N., & Ringel, G., 1994. *Pearls in Graph Theory a Comprehensive Introduction*. Academic Press.
- [10] Irene, Y., Mahmudi, M., & Nurmeleni, N., 2024. On Super (a,d)-C<sub>3</sub>- Antimagic Total Labeling of Dutch Windmill Graph  $D_{3^m}$ . *Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, Vol. 9, No. 1, 189–204.
- [11] Koshy, T., 2004. *Discrete Mathematics with Applications*. Elsevier Academic Press.
- [12] Meena, S., 2012. Prime Labeling of Friendship Graphs. *International Journal of Engineering Research & Technology*, Vol. 1, No. 10.
- [13] Mwamba, N., 2022. The Relatively Prime Nature of Consecutive Integers. *International Journal of Mathematics And its Applications*, Vol. 10, No. 1, 97–100.
- [14] Rosen, K. H., 2011. *Elementary Number Theory and Its Applications*. Addison-Wesley.