

## Fibonacci Prime Labelling on the Class of Flower Graphs

### Pelabelan Prima Fibonacci pada Kelas Graf Bunga

Desi Rahmadani<sup>1\*</sup>, Afie Ahmadani<sup>2</sup>, Tjang Daniel Chandra<sup>3</sup>, Mochammad Hafiizh<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>*Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,  
Universitas Negeri Malang, Indonesia*

*Email: desi.rahmadani.fmipa@um.ac.id, afie.ahmadani.2103126@studens.um.ac.id,  
tjang.daniel.fmipa@um.ac.id, moch.hafiish.fmipa@um.ac.id*

*\*Corresponding author*

#### Abstract

Graph labeling is one of the significant topics in graph theory. One of its interesting variants is Fibonacci prime labeling, a special type of labeling that assigns Fibonacci numbers as vertex labels while satisfying certain conditions. A graph labeling is an assignment of labels (elements of some set) to elements of a graph, usually the vertices or the edges (or both) of the graph. Several previous studies have shown that some classes of graphs, such as cycle graphs, fan graphs, and umbrella graphs, satisfy the criteria for Fibonacci prime labeling. Moreover, previous research has proven that flower graphs and double flower graphs admit prime labeling. Motivated by these findings, this study aims to explore whether these two classes of graphs also admit Fibonacci prime labeling. This exploration seeks to identify a potential relationship between prime labeling and Fibonacci prime labeling in these graph classes. This research focuses on graphs with an even number of vertices. The methods used include literature review and mathematical proof. The novelty of this study lies in extending the results of prime labeling to Fibonacci prime labeling for flower and double flower graphs. The results show that both graph classes with an even number of vertices belong to the class of graphs that admit Fibonacci prime labeling.

**Keywords:** Graph labeling, Fibonacci prime labeling, flower graph

#### Abstrak

Pelabelan graf merupakan salah satu topik penting dalam teori graf. Salah satu variannya yang menarik adalah pelabelan prima Fibonacci, yaitu jenis pelabelan khusus yang menggunakan bilangan Fibonacci sebagai label simpul, dengan memenuhi syarat-syarat tertentu. Pelabelan graf sendiri adalah pemberian label (elemen dari suatu himpunan) kepada elemen-elemen dari sebuah graf, biasanya pada simpul, sisi, atau keduanya dari graf tersebut. Sejumlah penelitian sebelumnya telah membuktikan bahwa beberapa kelas graf seperti graf siklik, graf kipas, dan graf payung memenuhi kriteria pelabelan prima Fibonacci. Selain itu, penelitian terdahulu juga telah



# JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

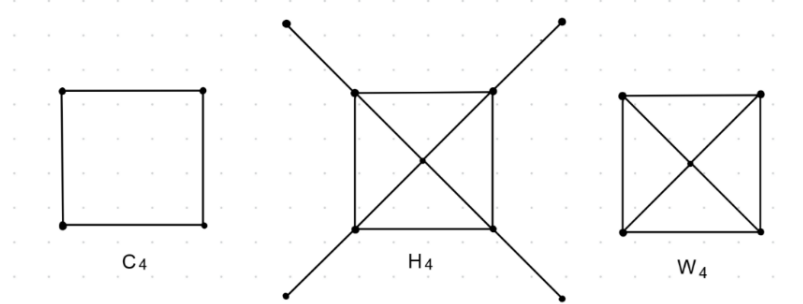
Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh

menunjukkan bahwa graf bunga dan graf bunga berganda memiliki pelabelan prima. Berdasarkan temuan tersebut, penelitian ini tertarik untuk mengkaji lebih lanjut apakah kedua kelas graf tersebut juga memenuhi pelabelan prima Fibonacci. Hal ini dilakukan untuk melihat adanya kemungkinan hubungan antara pelabelan prima dan pelabelan prima Fibonacci pada kelas graf tersebut. Fokus penelitian ini adalah pada graf-graf dengan jumlah simpul genap. Metode yang digunakan meliputi kajian literatur dan pembuktian matematis. Kebaruan dari penelitian ini terletak pada perluasan hasil pelabelan prima ke pelabelan prima Fibonacci pada graf bunga dan graf bunga berganda. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua kelas graf tersebut dengan jumlah simpul genap termasuk dalam merupakan graf yang memiliki pelabelan prima Fibonacci.

**Kata kunci:** Pelabelan graf, pelabelan prima Fibonacci, graf bunga

## 1. PENDAHULUAN DAN KONSEP DASAR

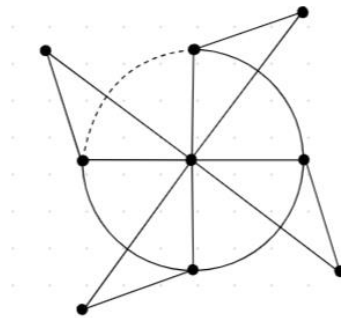
Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dimana  $V$  adalah himpunan tak kosong, dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan elemen  $V$  yang tidak berurutan. Pada graf  $G$  elemen  $V$  menyatakan simpul dari  $G$  dan elemen  $E$  menyatakan sisi dari  $G$ . Biasanya dituliskan  $V(G)$  menyatakan himpunan simpul dari  $G$  dan  $E(G)$  menyatakan himpunan sisi dari  $G$  [8]. Graf memiliki banyak jenis beberapa di antaranya adalah graf *cycle*, graf *wheels*, graf *helm* dan ada banyak lagi graf lain. Graf *cycle* dinotasikan dengan  $C_n$  adalah graf dengan  $n$  simpul dan  $n$  sisi, semua berada pada dalam satu siklus [7]. Graf *Wheels* yang dinotasikan dengan  $W_n$  terbentuk ketika ditambahkan satu simpul baru ke dalam graf *cycle*  $C_n$  (dengan  $n \geq 3$ ) dan menghubungkan simpul baru ini dengan setiap  $n$  simpul pada graf  $C_n$  tersebut dengan sisi-sisi baru [16]. Graf *helm*  $H_n$  adalah graf yang diperoleh dari graf *Wheels*  $W_n$  dengan menambahkan satu sisi gantung pada setiap simpul dari  $n$  -*cycle* [5]. Berikut diberikan contoh graf pada Gambar 1.1 berikut.



**Gambar 1.1.** Graf Cycle  $C_4$ , Graf Helm  $H_4$ , dan Graf Wheel  $W_4$

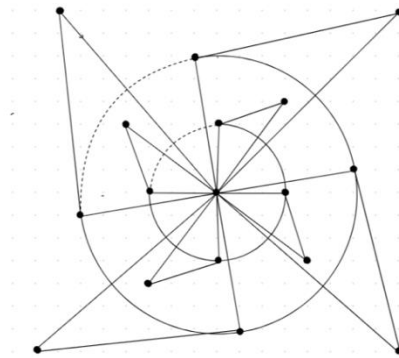
Selanjutnya akan dibahas graf bunga yang dinotasikan dengan  $Fl(n)$ , dengan  $n$  bilangan bulat positif. Sebelum masuk pada pembahasan graf bunga akan diberikan penjelasan simpul gantung sebagai bagian yang membangun graf bunga. Simpul  $v$  disebut simpul gantung jika dan hanya jika terhubung ke satu simpul lain, dan sebuah sisi gantung  $e = uv$  disebut sisi gantung jika salah satu simpul ujungnya merupakan simpul gantung [11]. Graf bunga  $Fl(n)$  adalah graf yang dikonstruksi dari graf *Helm*  $H_n$  dengan cara menghubungkan setiap simpul gantung dalam  $H_n$  ke satu simpul pusat yang disebut sebagai apeks. Graf bunga  $Fl(n)$  memiliki tiga jenis simpul, yaitu satu apeks dengan derajat  $2n$ ,  $n$  simpul dengan derajat 4, dan  $n$  simpul dengan derajat 2 [1], seperti pada Gambar 1.2.

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh**



**Gambar 1.2.** Graf Bunga  $Fl(n)$

Graf Bunga Berganda (*double flower graph*)  $Fl_2(n)$  adalah graf yang dibentuk dengan menduplikasi graf bunga  $Fl(n)$  sebanyak 2 kali lalu menyatukan masing-masing simpul pusatnya [15]. Graf  $Fl_2(n)$  diberikan seperti pada Gambar 1.3 berikut.



**Gambar 1.3.** Graf  $Fl_2(n)$

Suatu fungsi  $f$  dari  $A$  ke  $B$  adalah pemetaan tepat satu elemen  $B$  untuk setiap elemen  $A$ . Dapat ditulis  $f(a) = b$ , jika  $b$  adalah elemen unik dari  $B$  yang dipetakan oleh fungsi  $f$  kepada elemen  $a$  dari  $A$ . Jika  $f$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $B$ , dapat ditulis  $f: A \rightarrow B$ . Fungsi  $f$  dikatakan satu-satu (*one-to-one*), atau injektif, jika dan hanya jika  $f(a) = f(b)$  mengakibatkan  $a = b$  untuk semua  $a$  dan  $b$  dalam domain  $f$ . Suatu fungsi dikatakan injektif jika ia bersifat satu-satu (*one-to-one*) [3]. Diberikan bilangan bulat  $a$  dan  $b$ , dengan salah satunya tidak nol. *Great common divisor* dari  $a$  dan  $b$ , dinotasikan dengan  $\gcd(a, b)$ , adalah bilangan bulat positif  $d$  jika dan hanya jika a)  $d$  pembagi  $a$ ,  $d$  pembagi  $b$ ; b) jika  $c$  pembagi  $a$ , dan  $c$  pembagi  $d$ , maka  $c \leq d$  [2]. Karena pelabelan prima Fibonacci melibatkan penggunaan bilangan Fibonacci, selanjutnya diberikan definisi tentang bilangan Fibonacci dan beberapa sifat yang akan digunakan dalam pembuktian teorema. Bilangan Fibonacci didefinisikan seperti pada Definisi 1.1 berikut.

**Definisi 1.1.**[17] Barisan Fibonacci didefinisikan secara rekursif dengan  $F_1 = 1, F_2 = 1$ , dan  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , untuk  $n \geq 3$ . Suku-suku dalam barisan ini disebut bilangan Fibonacci.

**Sifat 1.2.** [6] Untuk  $n \geq 0$ ,  $\gcd(F_n, F_{n+1}) = 1$ .

**Sifat 1.3.** [6] Untuk  $n \geq 0$ ,  $\gcd(F_n, F_{n+2}) = 1$ .

Salah satu topik penting yang terdapat pada teori graf yang memiliki banyak aplikasi dalam ilmu komputer, optimasi jaringan dan kriptografi adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh

pemberian label (elemen dari suatu himpunan) ke elemen-elemen graf  $G$ , biasanya pada simpul (*vertex*) atau sisi (*edge*), atau keduanya. Jika hanya simpul dari graf  $G$  yang diberi label, maka graf yang dihasilkan adalah graf berlabel simpul. Dalam kasus sisi, graf yang dihasilkan graf berlabel sisi [4]. Sampai saat ini pelabelan graf masih terus dikembangkan dan ada banyak sekali jenis pelabelan pada graf seperti pelabelan *gracefull*, pelabelan *harmonius*, pelabelan prima, pelabelan prima Fibonacci dan masih banyak lagi. Pada artikel ini akan difokuskan pada pelabelan prima Fibonacci. Pelabelan prima Fibonacci pada graf  $G = (V(G), E(G))$  dengan  $|V(G)| = n$  (dengan  $n$  bilangan bulat positif) adalah fungsi injektif  $g: V(G) \rightarrow \{F_2, F_3, \dots, F_{n+1}\}$ , dimana  $F_n$  adalah bilangan Fibonacci ke  $n$ , yang menginduksi fungsi  $g': E(G) \rightarrow \mathbb{N}$  di definisikan oleh  $g'(uv) = \gcd(g(u)g(v)) = 1, \forall uv \in E(G)$ . Graf yang memiliki pelabelan prima Fibonacci disebut graf prima Fibonacci [19].

Salah satu graf yang menerima pelabelan prima Fibonacci dan disebut sebagai graf prima Fibonacci adalah graf *cycle*. Graf *cycle* ( $C_n$ ) adalah graf prima Fibonacci untuk  $n \geq 3$  [19]. Para ahli telah melakukan penelitian dan membuktikan konsep pelabelan prima Fibonacci melalui penelitian mereka antara lain, pelabelan prima Fibonacci pada graf *path*  $P_n$ , graf *cycle*  $C_n$ , graf *fan*  $P_n'$ , graf *umbrella*  $U_{m,n}$ , graf *star*  $K_{1,n}$ , graf *friendship*  $F_n$ , dan graf *dragon*  $D_n(m)$  [19], pelabelan prima Fibonacci pada graf *cycle* dan sejenisnya [3], pelabelan prima Fibonacci pada graf ular [10], pelabelan prima Fibonacci ke- $k$  pada graf  $H$  dan graf ulat  $H_n$  [18], pelabelan prima simpul Fibonacci pada beberapa graf [12], dan pelabelan prima Fibonacci ke- $K$  pada graf [14].

Pada penelitian sebelumnya, telah dibuktikan bahwa graf bunga  $Fl(n)$  memiliki pelabelan prima untuk  $n \geq 3$  [1]. Selanjutnya, Rahmadani dkk. [15] telah membuktikan bahwa graf bunga berganda  $Fl_r(n)$  untuk  $n \geq 3$  dan  $r = 2, 3$ , juga memiliki pelabelan prima. Selain itu, telah dibuktikan bahwa graf busur (*bow graph*) dan graf bunga (*shell flower graph*) memiliki pelabelan *graceful* [9] dan beberapa graf bunga memiliki pelabelan *Integer Cordial and Face Integer Cordial* [13]. Dalam penelitian ini dibuktikan bahwa kelas graf bunga  $Fl(n)$  dan graf bunga berganda  $Fl_2(n)$ , untuk  $n \geq 3$  memiliki pelabelan prima Fibonacci.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur dan eksplorasi yang berfokus pada peninjauan dan analisis hasil penelitian terdahulu terkait pelabelan prima Fibonacci. Pertama-tama, diberikan definisi graf bunga  $Fl(n)$  dan graf bunga berganda  $Fl_2(n)$  untuk  $n \geq 3$ . Kemudian menentukan pelabelan prima Fibonacci pada graf bunga  $Fl(n)$  dan graf  $Fl_2(n)$  untuk beberapa nilai  $n$  tertentu sampai ditemukan pola pelabelannya. Melalui analisis pola, dirumuskan teorema pelabelan prima Fibonacci pada graf bunga  $Fl(n)$  dan graf  $Fl_2(n)$  untuk setiap  $n \geq 3$ . Terakhir, teorema dibuktikan secara matematis bahwa graf bunga  $Fl(n)$  dan graf  $Fl_2(n)$  memiliki pelabelan prima Fibonacci serta merumuskan kesimpulan terhadap hasil yang diperoleh.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibuktikan secara matematis bahwa graf bunga  $Fl(n)$  untuk  $n \geq 3$  adalah graf prima Fibonacci. Graf bunga  $Fl(n)$  adalah graf yang dikonstruksi dari graf *Helm*  $H_n$  dengan cara menghubungkan setiap simpul gantung (simpul berderajat satu) pada  $H_n$  ke satu simpul pusat yang disebut sebagai apeks. Akibatnya, graf  $Fl(n)$  terdiri dari tiga jenis simpul, yaitu satu apeks dengan derajat  $2n$ ,  $n$  simpul dengan derajat 4, dan  $n$  simpul dengan derajat 2 [6]. Graf bunga  $Fl(n)$  dapat menjadi dasar dalam mengkonstruksi graf bunga berganda  $Fl_r(n)$ . Graf  $Fl_r(n)$  adalah graf yang dibentuk dari  $r$  salinan graf bunga  $Fl(n)$  lalu menyatukan masing-masing simpul pusatnya [7]. Pada

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh**

penelitian ini juga dibuktikan bahwa graf bunga berganda  $Fl_2(n)$  untuk  $n \geq 3$  juga merupakan graf prima Fibonacci.

Pertama, dibuktikan bahwa graf bunga  $Fl(n)$  adalah graf prima Fibonacci.

**Teorema 3.1.** *Graf bunga  $Fl(n)$  untuk bilangan bulat genap  $n \geq 3$  merupakan graf prima Fibonacci.*

**Bukti:**

Misalkan graf bunga  $Fl(n)$  adalah graf yang memiliki himpunan simpul:

$$V(Fl(n)) = \{c, u_i, v_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Banyaknya simpul dari graf bunga  $Fl(n)$  dapat dihitung dengan meninjau setiap elemen yang ada di himpunan tersebut:

- Terdapat satu simpul pusat  $c$
- Terdapat  $n$  simpul  $u_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .
- Terdapat  $n$  simpul  $v_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

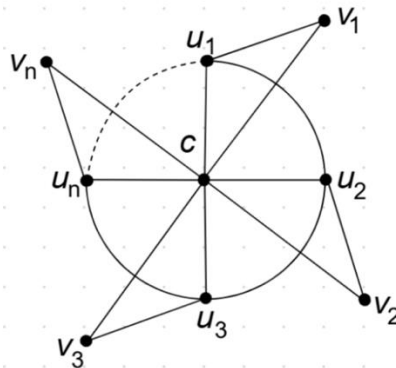
Selanjutnya menghitung total banyaknya simpul  $1 + n + n = 2n + 1$

Sehingga total banyaknya simpul  $|V(Fl(n))| = 2n + 1$

Kemudian himpunan sisi graf  $Fl(n)$  adalah.

$$E(Fl(n)) = \{cu_i, cv_i, u_i v_i, u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Selanjutnya, diberikan graf bunga  $Fl(n)$  seperti pada Gambar 3.1 berikut.



**Gambar 3.1.** Graf Bunga  $Fl(n)$

Selanjutnya dibuktikan bahwa pelabelan simpul  $g: V(Fl(n)) \rightarrow \{F_2, F_3, F_4, \dots, F_{2n+2}\}$  adalah fungsi injektif. Didefinisikan pelabelan simpul pada graf bunga  $Fl(n)$  sebagai berikut

$$g(c) = F_2 = 1 \quad (1)$$

$$g(u_i) = F_{2i+2}, 1 \leq i \leq n \quad (2)$$

$$g(v_i) = F_{2i+1}, 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

Berdasarkan Persamaan (2) – (3) diperoleh bahwa nilai  $g(u_i)$  selalu bilangan genap, dan nilai  $g(v_i)$  selalu bilangan ganjil untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ . Oleh karena itu, untuk  $a, b \in V(Fl(n))$  dengan  $a \neq b$  maka  $g(a) \neq g(b)$ . Sehingga terbukti bahwa  $g: V(Fl(n)) \rightarrow \{F_2, F_3, F_4, \dots, F_{2n+2}\}$  adalah fungsi injektif.

Selanjutnya akan dibuktikan fungsi terinduksi  $g': E(Fl(n)) \rightarrow \mathbb{N}$  yang didefinisikan dengan  $g'(ab) = \gcd(g(a), g(b)), \forall ab \in E(Fl(n))$ .

Perhatikan beberapa kasus berikut:

**Kasus 1.**

$$\begin{aligned} \gcd(g(c), g(u_j)) &= \gcd(F_2, F_{2j+2}) \\ &= \gcd(1, F_{2j+2}) \end{aligned}$$

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh**

$$\begin{aligned} \gcd(g(c), g(v_j)) &= 1 \\ &= \gcd(F_2, F_{2j+1}) \\ &= \gcd(1, F_{2j+1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jelas bahwa,  $\gcd(1, a) = 1$ , untuk setiap  $a \in \mathbb{Z}$ .

**Kasus 2.**

$$\gcd(g(u_j), g(v_j)) = \gcd(F_{2j+2}, F_{2j+1})$$

Berdasarkan Sifat 1.2, karena  $g(u_j)$  dan  $g(v_j)$  adalah dua bilangan Fibonacci yang berurutan maka diperoleh  $\gcd(g(u_j), g(v_j)) = 1$ .

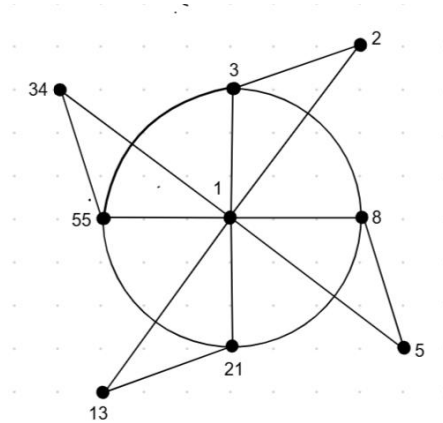
**Kasus 3.**

$$\gcd(g(u_j), g(u_{j+1})) = \gcd(F_{2j+2}, F_{2j+4})$$

Berdasarkan Sifat 1.3, diperoleh  $\gcd(g(u_j), g(u_{j+1})) = 1$ .

Sehingga terbukti bahwa  $g'(ab) = \gcd(g(a), g(b)) = 1, \forall ab \in E(Fl(n))$ . Oleh karena itu, graf bunga  $Fl(n)$  adalah graf prima Fibonacci. ■

Sebagai ilustrasi, diberikan pelabelan prima Fibonacci pada graf bunga  $Fl(4)$  seperti pada Gambar 3.2 berikut.



**Gambar 3.2.** Pelabelan prima Fibonacci pada Graf Bunga  $Fl(4)$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa kelas graf  $Fl_2(n)$  untuk bilangan bulat genap  $n \geq 3$  memiliki pelabelan prima seperti yang diberikan pada Teorema 3.2 berikut.

**Teorema 3.2.** *Graf bunga berganda  $Fl_2(n)$  untuk bilangan bulat genap  $n \geq 3$  merupakan graf prima Fibonacci.*

**Bukti:**

Misalkan  $Fl_2(n)$  adalah graf yang memiliki himpunan simpul:

$$V(Fl_2(n)) = \{c, u_i, v_i, w_i, x_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Banyaknya simpul dari graf  $Fl_2(n)$  dapat dihitung dengan meninjau setiap elemen yang ada pada himpunan tersebut:

- Terdapat satu simpul pusat  $c$
- Terdapat  $n$  simpul  $u_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .
- Terdapat  $n$  simpul  $v_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .
- Terdapat  $n$  simpul  $w_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh**

- Terdapat  $n$  simpul  $x_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

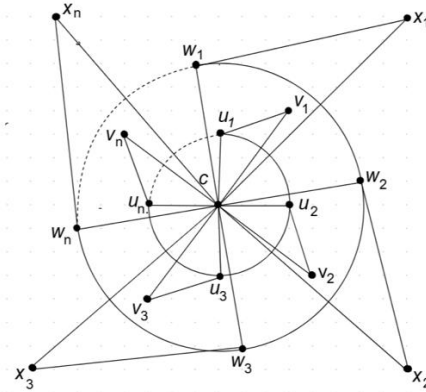
Selanjutnya menghitung total banyaknya simpul  $1 + n + n + n + n = 4n + 1$

Sehingga total banyaknya simpul  $|V(Fl_2(n))| = 4n + 1$

Kemudian himpunan sisi graf  $Fl_2(n)$  adalah.

$$E(Fl_2(n)) = \{cu_i, cv_i, cw_i, cx_i, u_i v_i, u_i u_{i+1}, w_i x_i, w_i w_{i+1} | i = 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Selanjutnya, graf  $Fl_2(n)$  ditunjukkan seperti pada Gambar 3.3 berikut.



**Gambar 3.3.** Graf  $Fl_2(n)$

Selanjutnya dibuktikan bahwa pelabelan simpul  $g: V(Fl_2(n)) \rightarrow \{F_2, F_3, F_4, \dots, F_{4n+2}\}$  adalah fungsi injektif. Didefinisikan pelabelan simpul pada graf bunga modifikasi  $Fl_2(n)$  sebagai berikut:

$$g(c) = F_2 = 1 \quad (4)$$

$$g(u_i) = F_{2i+2}, 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

$$g(v_i) = F_{2i+1}, 1 \leq i \leq n \quad (6)$$

$$g(w_i) = F_{2i+2n+1}, 1 \leq i \leq n \quad (7)$$

$$g(x_i) = F_{2i+2n+2}, 1 \leq i \leq n \quad (8)$$

Berdasarkan Persamaan (4)-(8) diperoleh bahwa nilai  $g(u_i)$  dan  $g(x_i)$  selalu bernilai genap, dan diperoleh juga bahwa  $g(v_i)$  dan  $g(w_i)$  selalu bernilai ganjil untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ . Oleh karena itu, untuk  $a, b \in V(Fl_2(n))$  dengan  $a \neq b$ , maka  $g(a) \neq g(b)$ . Sehingga terbukti bahwa  $g: V(Fl_2(n)) \rightarrow \{F_2, F_3, F_4, \dots, F_{4n+2}\}$  adalah fungsi injektif.

Selanjutnya, akan dibuktikan fungsi terinduksi  $g': E(Fl_2(n)) \rightarrow N$  yang didefinisikan dengan  $g'(ab) = \gcd(g(a), g(b)), \forall ab \in E(Fl_2(n))$ .

Perhatikan beberapa kasus berikut:

**Kasus 1.**

$$\begin{aligned} \gcd(g(c), g(u_i)) &= \gcd(F_2, F_{2i+2}) \\ &= \gcd(1, F_{2i+2}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gcd(g(c), g(v_i)) &= \gcd(F_2, F_{2i+1}) \\ &= \gcd(1, F_{2i+1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gcd(g(c), g(w_i)) &= \gcd(F_2, F_{2i+2n+1}) \\ &= \gcd(1, F_{2i+2n+1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gcd(g(c), g(x_i)) &= \gcd(F_2, F_{2i+2n+2}) \\ &= \gcd(F_2, F_{2i+2n+2}) \end{aligned}$$

$$= 1.$$

**Kasus 2.**

$$\gcd(g(u_i), g(v_i)) = \gcd(F_{2i+2}, F_{2i+1}).$$

Berdasarkan sifat 1.2, karena  $g(u_i)$  dan  $g(v_i)$  adalah dua bilangan Fibonacci yang berurutan maka diperoleh  $\gcd(g(u_i), g(v_i)) = 1$ .

**Kasus 3.**

$$\gcd(g(w_i), g(x_i)) = \gcd(F_{2i+2n+2}, F_{2i+2n+1}) = 1.$$

Berdasarkan sifat 1.2, karena  $g(w_i)$  dan  $g(x_i)$  adalah dua bilangan Fibonacci yang berurutan maka diperoleh  $\gcd(g(w_i), g(x_i)) = 1$ .

**Kasus 4**

$$\gcd(g(u_i), g(u_{i+1})) = \gcd(F_{2i+2}, F_{2i+4})$$

Berdasarkan sifat 1.3, diperoleh  $\gcd(g(u_i), g(u_{i+1})) = 1$ .

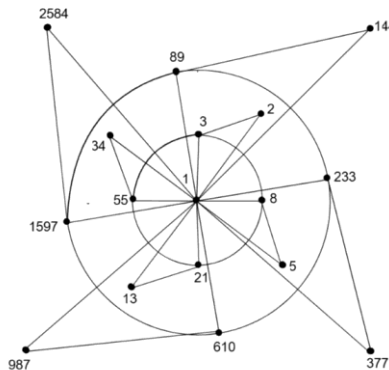
**Kasus 5.**

$$\gcd(g(w_i), g(w_{i+1})) = \gcd(F_{2i+2n+2}, F_{2i+2n+4}).$$

Berdasarkan sifat 1.3, diperoleh  $\gcd(g(w_i), g(w_{i+1})) = 1$ .

Sehingga terbukti bahwa  $g'(ab) = \gcd(g(a), g(b)) = 1, \forall ab \in E(Fl_2(n))$ . Oleh karena itu, graf bunga berganda  $Fl_2(n)$  adalah graf prima Fibonacci. ■

Sebagai ilustrasi, diberikan pelabelan prima Fibonacci pada graf  $Fl_2(4)$  seperti pada Gambar 3.4.



**Gambar 3.4.** Pelabelan prima Fibonacci pada Graf  $Fl_2(4)$

Berdasarkan Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 terbukti bahwa dua kelas graf bunga  $Fl(n)$  dan  $Fl_2(n)$  untuk  $n$  bilangan bulat genap juga memiliki pelabelan prima Fibonacci. Meskipun hasil penelitian menunjukkan bahwa graf bunga  $Fl(n)$  dan graf  $Fl_2(n)$  merupakan graf prima Fibonacci untuk bilangan bulat genap  $n \geq 3$ , tetapi dalam penelitian ini telah dilakukan observasi untuk beberapa bilangan bulat ganjil  $n \geq 3$ . Hasil observasi menunjukkan bahwa graf bunga  $Fl(n)$  dan  $Fl_2(n)$  untuk beberapa  $n$  bilangan bulat ganjil juga memiliki pelabelan prima Fibonacci. Tetapi, pola yang kompleks mengakibatkan pembuktiannya secara umum masih belum ditemukan. Hasil penelitian ini memperluas studi sebelumnya tentang pelabelan graf khususnya pada kelas graf bunga.

Penelitian terdahulu menunjukkan bahwa graf bunga  $Fl(n)$  memenuhi syarat pelabelan prima untuk  $n \geq 3n$  [1]. Rahmadani dkk. [15] kemudian memperluas hasil ini dengan membuktikan bahwa graf bunga berganda  $Fl_r(n)$  untuk  $r = 2, 3$  dan  $n \geq 3$ , juga memiliki pelabelan prima. Di sisi lain, telah diketahui pula bahwa graf busur (*bow graph*) dan graf bunga kerang (*shell flower graph*) memiliki pelabelan graceful [9], serta beberapa graf bunga lainnya terbukti memiliki pelabelan Integer Cordial dan Face Integer Cordial [13]. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa struktur graf yang telah diketahui memiliki pelabelan prima, graceful, Integer Cordial dan Face

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh

Integer Cordial juga dapat memenuhi syarat pelabelan prima Fibonacci, yang memiliki sifat lebih spesifik dari pelabelan prima.

### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf bunga  $Fl(n)$  dan graf bunga berganda  $Fl_2(n)$  dengan  $n \geq 3$  dan  $n$  bilangan genap merupakan graf prima Fibonacci. Hal ini dibuktikan dengan konstruksi pelabelan prima Fibonacci yang memenuhi syarat berupa pelabelan simpul merupakan fungsi injektif dan  $\gcd(g(u), g(v)) = 1$ , untuk setiap simpul  $u$  dan  $v$  yang bertetangga. Penelitian ini memperluas penentuan pelabelan Prima Fibonacci dengan mengaplikasikannya pada graf yang lebih kompleks, yaitu graf bunga dan graf  $Fl_2(n)$ . Namun, berdasarkan observasi awal terhadap graf bunga  $Fl(n)$  dan graf  $Fl_2(n)$ , diduga bahwa untuk  $n$  bilangan ganjil memiliki pelabelan prima Fibonacci. Tetapi, pola umum untuk pelabelan prima Fibonacci untuk graf tersebut belum ditemukan sehingga masih menjadi masalah terbuka. Hasil penelitian ini tidak hanya memperkaya kelas graf yang diketahui memiliki pelabelan prima Fibonacci, tetapi juga membuka peluang untuk mengeksplorasi pelabelan serupa pada kelas graf lainnya yang memiliki struktur kompleks seperti graf bunga  $Fl(n)$  dan  $Fl_2(n)$  untuk  $n$  bilangan bulat ganjil, graf bunga kerang (*shell flower graph*), maupun kelas graf lainnya yang masih menjadi masalah terbuka

### ACKNOWLEDGEMENT

Penelitian ini didanai oleh Universitas Negeri Malang melalui hibah Penelitian Internal UM Tahun 2025 Skema Desentralisasi FMIPA.

### CONFLICT OF INTEREST

The authors declare that there is no conflict of interest

### REFERENSI

- [1] Ashokkumar, S., & Maragathavalli, S. 2015. Prime Labelling of Some Special Graphs. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, 11(1), 51–58.
- [2] Burton, D. M. 2011. *Elementary number theory* (7. ed). McGraw-Hill. [www.rnhhe.com](http://www.rnhhe.com)
- [3] Chandrakala, S., & Sekar, D. C. 2018. Fibonacci Prime Labeling of Cycle Related Graphs. *International Journal for Research in Engineering Application & Management (IJREAM)*, 04(03), 805–807.
- [4] Chartrand, G., Egan, C., & Zhang, P. 2019. *How to Label a Graph*. Springer International Publishing.
- [5] Gallian, J. A. 2022. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 1000, DS6: Dec 2.
- [6] Grimaldi, R. 2012. *Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction* (illustrated ed.). John Wiley & Sons.
- [7] Gross, J. L., & Yellen, J. 2004. *Handbook of Graph Theory*. CRC Press LLC.
- [8] Hartsfield, N., & Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory—A Comprehensive Introduction*. Academic Press.
- [9] Jeshinta, J. J., & Stanley, E. H. 2013. Graceful labeling of bow graphs and shell flower graphs. *International Journal of Computing Algorithm*, 02(01), 62–64.
- [10] Jenifer, J., & Subbulakshmi, M. 2021. Fibonacci Prime Labeling of Snake Graph. *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 17, 51–58.

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Desi Rahmadani, Afie Ahmadani, Tjang Daniel Chandra, Mochammad Hafiizh**

- [11] Levit, V. E., & Mandrescu, E. 2005. *The independence polynomial of a graph—A survey*. arXiv preprint [arXiv:0904.4819]. <https://arxiv.org/abs/0904.4819>.
- [12] Nair, M., S., & Suresh, J. S. 2023. Fibonacci Vertex Prime Labelings of Some Graphs. *Mapana – Journal of Sciences*, 22(1), 179–185.
- [13] Parameswari, R., Pritha, K. S., & Rajeswari, R. 2021. Integer Cordial and Face Integer Cordial Labeling of Some Flower Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1770(1), 012079.
- [14] Periasamy, K., Venugopal, K., & Raj, P. L. R. 2022. K-th Fibonacci Prime Labeling of Graphs. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 68(5), 61–67.
- [15] Rahmadani, D., Aldiansyah, A., Pratiwi, D., Yunus, M., & Kusumasari, V. 2025. Prime Labeling of Amalgamation of Flower Graphs. *Barekeng: Journal of Mathematics and its Applications*, *Accepted*.
- [16] Rosen, K. H. (2019). *Discrete mathematics and its applications* (8th ed). McGraw-Hill education. mheducation.com/highered
- [17] Rosen, K.H. 2011. *Elementary Number Theory and Its Applications*. Addison-Wesley.
- [18] Sari, N. Y., Noviani, E., & Fran, F. 2023. Pelabelan Fibonacci Prima ke-k pada Graf H dan Graf Ulat  $H_n$ . *Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, 8(2), 89–98.
- [19] Sekar, D. C., & Chandrakala, S. 2018. *Fibonacci Prime Labeling of Graphs*. *International Journal of Creative Research Thoughts*, 995–1001.