

A Study of Noetherian and Artinian (R, S) -Modules

Kajian Seputar (R, S) -Modul Noetherian dan Artinian

Dian Ariesta Yuwaningsih^{1,*}, Yassin Dwi Cahyo², Gusti Ayu Dwi Yanti³,
Rima Aksen Cahdriyana⁴, dan Dea Apriani⁵

^{1,4,5,*}Department of Mathematics Education, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia

²Department of Mathematics, Universitas Diponegoro, Semarang, Indonesia

³Department of Mathematics, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia

Email: ¹dian.ariesta@pmat.uad.ac.id, ²yassindwicahyo@gmail.com,

³gustiayudwiyanti2001@mail.ugm.ac.id, ⁴rima.cahdriyana@pmat.uad.ac.id,

⁵dea2100006058@webmail.uad.ac.id

*Corresponding Author

Abstract

As science develops, a module has been generalized to a new algebraic structure called (R, S) -module. Some of the concepts in the module can also be extended into the (R, S) -module structure. The concepts related to the Noetherian module and the Artinian module have never been developed into the (R, S) -module structure. Therefore, this study aims to examine the development results related to the Noetherian module and the Artinian module in the (R, S) -module. In this paper, we present the definition of Noetherian (R, S) -module, the definition of Artinian (R, S) -module, and the development results of its properties in the (R, S) -module structure.

Keywords: noetherian, artinian, (R, S) -module

Abstrak

Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, suatu modul telah diperumum menjadi struktur aljabar baru yang disebut dengan (R, S) -modul. Beberapa konsep di dalam modul juga dapat dikembangkan ke dalam struktur (R, S) -modul. Konsep terkait modul Noether dan modul Artin belum pernah dikembangkan ke dalam struktur (R, S) -modul. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji hasil pengembangan terkait modul Noether dan modul Artin di dalam (R, S) -modul. Pada tulisan ini disajikan pendefinisian dari (R, S) -modul Noether, pendefinisian (R, S) -modul Artin, serta hasil pengembangan sifat-sifatnya di dalam struktur (R, S) -modul.

Kata kunci: noether, artin, (R, S) -modul

1. PENDAHULUAN

Dalam perkembangannya, suatu ring mengalami proses perumuman menjadi sebuah modul, dengan ring dianggap sebagai kejadian khususnya. Oleh karena itu, para peneliti berusaha



memperumum definisi-definisi di dalam teori ring menjadi sebuah definisi dalam modul. Beberapa definisi yang mengalami perumuman diantaranya adalah ideal prima yang diperumum menjadi submodul prima, ideal maksimal yang diperumum menjadi submodul maksimal, ring Noether yang diperumum menjadi modul Noether, serta ring Artin yang diperumum menjadi modul Artin. Seperti yang telah diketahui, struktur ring dan modul sendiri mempunyai perbedaan yang signifikan, yaitu dalam modul tidak selalu dikenal operasi perkalian antar anggotanya, sementara ring mempunyai operasi perkalian di dalamnya. Selain itu, definisi modul sendiri melibatkan dua struktur yaitu grup aditif yang komutatif dan ring (dengan elemen satuan). Menurut Adkins [1] dan Wijayanti, dkk. [3], modul merupakan grup aditif abelian yang dilengkapi sebuah operasi pergandaan skalar atas suatu ring. Dari struktur modul, dapat diturunkan suatu struktur baru yang disebut dengan bimodul. Apabila diberikan ring R dan ring S , grup aditif abelian M merupakan (R, S) -bimodul apabila M merupakan modul kiri atas ring R , M merupakan modul kanan atas ring S , serta memenuhi sifat kompatibilitas yaitu $r(ms) = (rm)s$ untuk setiap $r \in R$, $m \in M$, dan $s \in S$.

Suatu grup aditif Abelian yang merupakan R -modul kiri dan S -modul kanan tidak selalu memenuhi sifat kompatibilitas. Sebagai contoh, diberikan S^* adalah ring matriks diagonal berukuran 2×2 atas $2\mathbb{Z}$, ring $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$, dan grup abelian $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in 2\mathbb{Z} \right\}$ terhadap operasi penjumlahan vektor. Dibentuk ring S yakni ring S^* dengan operasi perkalian yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap matriks diagonal A, B di S didefinisikan $AB := BA$. Selanjutnya, pabila didefinisikan operasi pergandaan skalar $\cdot : M \times S \rightarrow M$ dengan $m * A := Am$ untuk setiap vektor $m \in M$ dan matriks diagonal $A \in S$ maka diperoleh bahwa grup aditif abelian M merupakan R -modul kiri serta merupakan S -modul kanan. Kemudian diambil sebarang matriks $B \in R$, vektor $m \in M$, dan matriks diagonal $A \in S$, diperoleh bahwa $(Bm) * A \neq B(m * A)$. Dengan demikian, M bukan merupakan (R, S) -bimodul karena tidak terpenuhinya sifat kompatibilitas.

Selanjutnya, didefinisikan operasi pergandaan skalar $\cdot \cdot * : R \times M \times S \rightarrow M$ dengan definisi $B \cdot m * A := ABm$ untuk setiap matriks $B \in R$, vektor $m \in M$, dan matriks diagonal $A \in S$. Diambil sebarang matriks $B, B' \in R$, vektor $m, n \in M$, dan matriks diagonal $A, A' \in S$. Terhadap operasi pergandaan skalar " $\cdot \cdot *$ ", grup abelian M memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. $B \cdot (m + n) * A = B \cdot m * A + B \cdot n * A$
2. $(B + B') \cdot m * A = B \cdot m * A + B' \cdot m * A$
3. $B \cdot m * (A + A') = B \cdot m * A + B \cdot m * A'$
4. $B(B' \cdot m * A)A' = (BB') \cdot m * (AA')$

Karena sifat kompatibilitas pada pendefinisian bimodul tidak dipenuhi dan M memenuhi keempat aksioma di atas, maka telah didefinisikan struktur aljabar baru yang disebut dengan (R, S) -modul. Menurut Khumrapussorn, dkk. [2], setiap (R, S) -bimodul merupakan (R, S) -modul tetapi tidak berlaku sebaliknya seperti yang disajikan pada contoh di atas. Dengan demikian, (R, S) -modul merupakan generalisasi dari suatu (R, S) -bimodul. Selanjutnya, Khumrapussorn, dkk. [2] mengatakan bahwa setiap (R, S) -modul dapat menjadi (R, S) -bimodul apabila ring R dan ring S masing-masing mempunyai elemen idempoten sentral. Eksistensi elemen idempoten sentral ini digunakan dalam pendefinisian operasi pergandaan skalar serta sifat kompatibilitas dalam pembentukan (R, S) -bimodul. Oleh karena itu, dalam keseluruhan tulisan ini yang dimaksud dengan ring adalah ring komutatif tanpa elemen satuan. Jika ring yang digunakan merupakan ring dengan elemen satuan, maka (R, S) -modul akan sama dengan (R, S) -bimodul. Hal ini dikarenakan elemen satuan merupakan elemen idempoten sentral.

Seiring perkembangan ring menjadi modul, beberapa konsep di dalam teori ring juga mengalami perkembangan ke dalam modul. Begitu halnya dengan perkembangan suatu modul menjadi (R, S) -modul, terdapat banyak konsep aljabar yang juga mengalami perkembangan. Para peneliti telah menyajikan beberapa perkembangan konsep tersebut, diantaranya adalah konsep terkait homomorfisma (R, S) -modul sebagai generalisasi dari homomorfisma modul yang disajikan dalam Yuwaningsih, dkk. [4]; konsep terkait (R, S) -modul faktor sebagai generalisasi dari modul faktor yang disajikan dalam Yuwaningsih dan Wijayanti [5]; dan konsep terkait hasil tambah langsung suatu (R, S) -modul serta proyeksi pada (R, S) -modul sebagai generalisasi dari hasil tambah langsung suatu modul dan proyeksi pada modul, yang disajikan dalam Yuwaningsih [6].

Dalam Wijayanti, dkk. [2] konsep terkait ring Noether dan ring Artin telah dikembangkan ke dalam teori modul menjadi modul Noether dan modul Artin. Namun kedua konsep ini belum dikembangkan ke dalam struktur (R, S) -modul. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan struktur modul Noether dan modul Artin ke dalam struktur (R, S) -modul. Pada Bab 2 pada artikel ini disajikan kajian tentang (R, S) -modul Noether beserta sifat-sifatnya. Sedangkan pada Bab 3 pada penelitian ini disajikan kajian tentang (R, S) -modul Artin beserta sifat-sifatnya.

2. (R, S) -MODUL NOETHER

Seperti halnya pada teori ring dan teori modul, sebelum mendefinisikan (R, S) -modul Noether, berikut disajikan definisi dari suatu (R, S) -modul yang memenuhi sifat rantai naik (*Ascending Chain Condition* disingkat ACC) untuk (R, S) -submodul.

Definisi 2.1 Suatu (R, S) -modul M dikatakan memenuhi sifat rantai naik (*Ascending Chain Condition* disingkat ACC) untuk (R, S) -submodul apabila untuk setiap rantai submodul-submodul dari (R, S) -modul M , yaitu $P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \dots$, terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga memenuhi $P_k = P_t$ untuk setiap $t \geq k$.

Setelah mengetahui definisi sifat rantai naik untuk (R, S) -submodul, berikut disajikan definisi dari (R, S) -modul Noether.

Definisi 2.2 Suatu (R, S) -modul M disebut (R, S) -modul Noether apabila M memenuhi sifat rantai naik (ACC) untuk (R, S) -submodul.

Selanjutnya, berikut disajikan beberapa contoh tentang (R, S) -modul Noether.

Contoh 2.3 Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -modul merupakan $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -modul Noether.

Contoh 2.4 Suatu (R, S) -modul sederhana merupakan (R, S) -modul Noether. Hal ini dikarenakan (R, S) -submodulnya hanyalah $\{0\}$ dan dirinya sendiri. Misalnya, $\mathbb{Z}_5$ merupakan $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -modul Noether.

Contoh 2.5 Himpunan polinomial atas bilangan bulat $\mathbb{Z}[X]$ sebagai $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -modul bukan merupakan $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -modul Noether. Hal ini dikarenakan terdapat rantai naik $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -submodul di $\mathbb{Z}[X]$ berbentuk $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}x \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 \subseteq \dots$ yang tidak stasioner.

Seperti halnya dalam koleksi submodul-submodul dari suatu R -modul yang tak kosong, di dalam koleksi submodul-submodul dari suatu (R, S) -modul yang tak kosong juga dapat ditemukan elemen maksimal. Elemen S di (R, S) -modul M disebut elemen maksimal jika tidak terdapat (R, S) -submodul N di M sehingga $S \subset N$.

Definisi 2.6 Suatu modul M dikatakan memenuhi kondisi maksimal pada (R, S) -submodul apabila untuk setiap koleksi submodul-submodul dari (R, S) -modul M yang tak kosong memuat suatu

(R, S) -submodul yang maksimal, yaitu (R, S) -submodul yang tidak termuat di dalam (R, S) -submodul lain dalam koleksi submodul-submodul dari (R, S) -modul M .

Selanjutnya, diberikan suatu (R, S) -modul M , himpunan tak kosong $Y \subseteq M$, dan $\mathcal{G}$ adalah koleksi (R, S) -submodul di M yang memuat Y dengan

$$\mathcal{G} = \{K \mid K \text{ merupakan } (R, S) - \text{submodul di } M \text{ yang memuat } Y\}$$

Berdasarkan Khumprapussorn, dkk. [3], didefinisikan himpunan $\langle Y \rangle = \bigcap_{K \in \mathcal{G}} K$. Jelas bahwa $\langle Y \rangle$ merupakan (R, S) -submodul di M untuk setiap himpunan $Y \subseteq M$. Lebih lanjut, $\langle Y \rangle$ disebut sebagai (R, S) -submodul di M yang dibangun oleh Y dan setiap elemen dari Y selanjutnya disebut elemen pembangun dari $\langle Y \rangle$.

Apabila diberikan himpunan Y berhingga, yaitu $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$, maka (R, S) -submodul di M yang dibangun oleh Y dapat dituliskan dengan $\langle y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \rangle$. Selanjutnya, sebelum mendefinisikan (R, S) -modul yang dibangun secara hingga, berikut diberikan suatu lemma yang menyatakan bentuk lain dari (R, S) -submodul di M yang dibangun oleh Y .

Lemma 2.7 [3] Diberikan (R, S) -modul M dan himpunan $Y \subseteq M$. Jika $Y = \emptyset$, maka $\langle Y \rangle = \{0\}$. Namun, jika $Y \neq \emptyset$ maka

$$\langle Y \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i y_i s_i + \sum_{j=1}^k m_j y_j \mid r_i \in R, y_i, y_j \in Y, s_i \in S, m_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Definisi 2.8 [3] Suatu (R, S) -modul M dikatakan dibangun secara berhingga apabila $M = \langle Y \rangle$ untuk suatu himpunan berhingga $Y \subseteq M$.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu teorema yang menyatakan ekuivalensi sifat-sifat dari (R, S) -modul Noether. Hal ini mengacu pada sifat-sifat modul Noether sebagai generalisasi dari sifat-sifat ring Noether.

Teorema 2.9 Diberikan (R, S) -modul M . Pernyataan-pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen.

- M merupakan (R, S) -modul Noether.
- M memenuhi kondisi maksimal.
- Setiap (R, S) -submodul di M dibangun secara hingga.

BUKTI. $(a) \Rightarrow (b)$. Diketahui bahwa M merupakan (R, S) -modul Noether, berarti bahwa M memenuhi sifat rantai naik (ACC) untuk (R, S) -submodul. Diambil sebarang koleksi submodul-submodul dari (R, S) -modul M , misal $\mathcal{K}$ dengan $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Selanjutnya, diambil (R, S) -submodul $K_1 \in \mathcal{K}$, maka K_1 merupakan (R, S) -submodul yang maksimal di dalam $\mathcal{K}$. Jika tidak maksimal, karena M memenuhi sifat rantai naik (ACC) untuk (R, S) -submodul maka terdapat (R, S) -submodul $K_2 \in \mathcal{K}$ sehingga $K_1 \subseteq K_2$. Apabila K_2 merupakan (R, S) -submodul yang maksimal, maka terbukti. Namun apabila K_2 bukan merupakan (R, S) -submodul yang maksimal maka terdapat (R, S) -submodul $K_3 \in \mathcal{K}$ sehingga $K_2 \subseteq K_3$. Proses ini diteruskan hingga diperoleh suatu (R, S) -submodul yang maksimal di dalam $\mathcal{K}$. Oleh karena diketahui bahwa M memenuhi sifat rantai naik (ACC) untuk (R, S) -submodul, maka proses pengulangan tersebut akan berhenti pada suatu langkah berhingga, misalkan langkah ke- t . Jadi, diperoleh bahwa K_t merupakan (R, S) -submodul maksimal di dalam $\mathcal{K}$. Dengan demikian, terbukti bahwa M memenuhi kondisi maksimal.

$(b) \Rightarrow (c)$. Diketahui bahwa M memenuhi kondisi maksimal. Akan dibuktikan bahwa setiap (R, S) -submodul di M dibangun secara hingga. Diambil sebarang (R, S) -submodul N di M . Kemudian dibentuk koleksi submodul-submodul di N yang dibangun secara hingga, misalkan himpunan

$$\mathcal{H} = \{A \subseteq M \mid A(R, S) - \text{submodul di } N, A \text{ dibangun secara hingga}\}.$$

Jelas bahwa $\mathcal{H} \neq \emptyset$, karena $0 \in \mathcal{H}$. Karena M memenuhi kondisi maksimal, maka $\mathcal{H}$ memiliki elemen maksimal, misalkan A^* . Akan ditunjukkan bahwa $A^* = N$. Karena A^* merupakan (R, S) -submodul di N , maka jelas bahwa $A^* \subseteq N$. Selanjutnya, diambil sebarang elemen $n \in N$, maka diperoleh $A^* + \langle n \rangle$ merupakan (R, S) -submodul di N dan juga dibangun secara hingga. Akibatnya, diperoleh $A^* + \langle n \rangle \in \mathcal{H}$. Oleh karena diketahui A^* merupakan elemen maksimal di $\mathcal{H}$, maka haruslah $A^* + \langle n \rangle = A^*$, sehingga diperoleh $\langle n \rangle \subseteq A^*$. Akibatnya, diperoleh $n \in A^*$ sehingga diperoleh $N \subseteq A^*$. Dengan demikian, terbukti bahwa $A^* = N$. Dengan kata lain, terbukti bahwa setiap (R, S) -submodul di M dibangun secara hingga.

(c) $\Rightarrow$ (a). Diketahui bahwa setiap (R, S) -submodul di M dibangun secara hingga. Akan dibuktikan bahwa M merupakan (R, S) -modul Noether. Sama halnya dengan menunjukkan bahwa M memenuhi sifat rantai naik (ACC) (R, S) -submodul. Diambil sebarang rantai naik submodul-submodul di (R, S) -modul M , yaitu misalkan $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \cdots$. Diperoleh bahwa $M^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ merupakan (R, S) -submodul di M . Karena diketahui bahwa setiap (R, S) -submodul di M dibangun secara berhingga, maka terdapat elemen-elemen $m_1, m_2, \dots, m_k$ sedemikian sehingga memenuhi $M^* = \langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle$. Selanjutnya, untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ diperoleh $m_i \in M^*$, sehingga $m_i \in M_{k_i}$ untuk suatu $k_i \in \mathbb{Z}^+$. Kemudian, dipilih $j = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Diperoleh $M_{k_i} \subseteq M_j$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jadi, diperoleh $m_1, m_2, \dots, m_k \in M_j$, sehingga memenuhi:

$$M^* = \langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle \subseteq M_j \subseteq M^*.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $M^* = M_j$ untuk suatu $j \in \mathbb{Z}^+$. Jadi, terdapat $j \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga memenuhi $M_t = M_j$ untuk setiap bilangan bulat positif $t \geq j$. Dengan kata lain, dapat dikatakan bahwa (R, S) -modul M memenuhi sifat rantai naik (ACC) untuk (R, S) -submodul. Jadi, terbukti bahwa M merupakan (R, S) -modul Noether. ■

Pada teori modul, diketahui bahwa setiap submodul dari suatu modul Noether juga merupakan modul Noether. Sifat ini juga berlaku untuk (R, S) -modul Noether sebagai berikut.

Proposisi 2.10. Diberikan M merupakan (R, S) -modul Noether. Setiap (R, S) -submodul di M merupakan (R, S) -modul Noether.

BUKTI. Diketahui bahwa M merupakan (R, S) -modul Noether. Diambil sebarang (R, S) -submodul N di M , maka setiap (R, S) -submodul di N juga merupakan (R, S) -submodul di M . Dengan demikian, N juga memenuhi sifat rantai naik (ACC) untuk (R, S) -submodul. Jadi, terbukti bahwa N juga merupakan (R, S) -modul Noether. Karena pengambilan (R, S) -submodul N sebarang, maka terbukti bahwa setiap (R, S) -submodul di M juga merupakan (R, S) -modul Noether. ■

Selanjutnya, berikut disajikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R, S) -modul faktor membentuk (R, S) -modul Noether.

Proposisi 2.11. Diberikan (R, S) -modul M dan (R, S) -submodul N di M . M merupakan (R, S) -modul Noether jika dan hanya jika N dan M/N juga merupakan (R, S) -modul Noether.

BUKTI. Diketahui M merupakan (R, S) -modul Noether, maka berdasarkan proposisi 2.10 diperoleh bahwa N juga merupakan (R, S) -modul Noether. Selanjutnya, dibentuk (R, S) -modul faktor M/N . Misalkan $(M_1 + N)/N \subseteq (M_2 + N)/N \subseteq (M_3 + N)/N \subseteq \cdots$ merupakan sebarang rantai naik dari submodul-submodul di (R, S) -modul M/N . Akibatnya, dari sini diperoleh $(M_1 + N) \subseteq (M_2 + N) \subseteq (M_3 + N) \subseteq \cdots$ merupakan rantai naik dari submodul-submodul di (R, S) -modul M . Karena M merupakan (R, S) -modul Noether, maka M memenuhi sifat rantai naik (R, S) -submodul. Berarti terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga memenuhi $M_k + N = M_t + N$ untuk setiap $t \geq k$, Akibatnya, berarti untuk rantai naik $(M_1 + N)/N \subseteq (M_2 + N)/N \subseteq (M_3 + N)/N \subseteq \cdots$

juga terdapat terdapat bilangan bilat positif k sedemikian sehingga memenuhi $(M_k + N)/N = (M_t + N)/N$ untuk setiap $t \geq k$. Jadi, M/N juga memenuhi sifat rantai naik (R, S) -submodul. Dengan kata lain, terbukti bahwa M/N merupakan (R, S) -modul Noether. Sebaliknya, diketahui N dan M/N merupakan (R, S) -modul Noether. Diberikan $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ merupakan rantai naik dari submodul-submodul di (R, S) -modul M . Diperoleh $M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq M_3 \cap N \subseteq \dots$ merupakan rantai naik dari submodul-submodul di N . Karena N merupakan (R, S) -modul Noether, terdapat bilangan bulat positif k sehingga $M_i \cap N = M_k \cap N$ untuk setiap $i \geq k$. Akibatnya, diperoleh $(M_1 + N)/N \subseteq (M_2 + N)/N \subseteq (M_3 + N)/N \subseteq \dots$ merupakan rantai naik dari submodul-submodul di (R, S) -modul M/N . Karena M/N merupakan (R, S) -modul Noether, terdapat bilangan bulat positif p sehingga $(M_i + N)/N = (M_p + N)/N$ untuk setiap $i \geq p$. Selanjutnya, dipilih $n = \max(k, p)$. Diperoleh $M_i \cap N = M_n \cap N$ dan $(M_i + N)/N = (M_n + N)/N$ untuk setiap $i \geq n$. Jika $i \geq n$ dan $x \in M_i$, maka $x + N \in (M_i + N)/N = (M_n + N)/N$, sehingga terdapat elemen $y \in M_n$ sedemikian sehingga memenuhi $x + N = y + N$. Dari sini, diperoleh $x - y \in N$. Karena $M_n \subseteq M_i$ diperoleh $x - y \in M_i \cap N = M_n \cap N$, untuk $i \geq n$. Jika $x - y = z \in M_n \cap N$, maka diperoleh $x = y + z \in M_n$, sehingga $M_i \subseteq M_n$. Jadi, diperoleh $M_i = M_n$ untuk setiap $i \geq n$. Jadi, terbukti bahwa M merupakan (R, S) -modul Noether. ■

Diketahui bahwa konsep terkait homomorfisma (R, S) -modul dan hasil tambah langsung suatu (R, S) -modul telah disajikan oleh peneliti sebelumnya. Sebelum ke sifat berikutnya, berikut disajikan Teorema Utama Isomorfisma (R, S) -Modul menurut Yuwaningsih, dkk. [2].

Teorema 2.12. [2] Diberikan (R, S) -modul M dan M' . Jika $f: M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul, maka $M/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.

Berdasarkan Teorema 2.12, jika f merupakan epimorfisma (R, S) -modul, maka diperoleh $M/\text{Ker}(f) \cong M'$. Selanjutnya, dengan menggunakan konsep terkait homomorfisma (R, S) -modul, ternyata diperoleh sifat yang merupakan syarat cukup agar suatu hasil tambah langsung pada (R, S) -modul membentuk (R, S) -modul Noether.

Proposisi 2.13. Jika diberikan M dan N masing-masing merupakan (R, S) -modul Noether, maka hasil tambah langsung $M \oplus N$ juga merupakan (R, S) -modul Noether.

BUKTI. Diketahui M dan N masing-masing merupakan (R, S) -modul Noether. Akan dibuktikan bahwa hasil tambah langsung $M \oplus N$ juga merupakan (R, S) -modul Noether. Misalkan $K = M \oplus N$. Dibentuk suatu fungsi f dengan definisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f: K &\rightarrow N \\ (a, b) &\mapsto f((a, b)) = b, \text{ untuk setiap } (a, b) \in K. \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa f merupakan epimorfisma (R, S) -modul dengan $\text{ker } f = M$. Berdasarkan Teorema 2.12, diperoleh $K/M \cong N$. Dengan kata lain, $M \oplus N \cong N$. Karena N merupakan (R, S) -modul Noether, maka terbukti bahwa $M \oplus N$ juga merupakan (R, S) -modul Noether. ■

Dengan menggunakan sifat di atas, dapat diturunkan sifat berikut ini.

Proposisi 2.14. Diberikan (R, S) -modul M . Jika diberikan K dan L masing-masing merupakan (R, S) -submodul Noether di M , maka $K + L$ juga merupakan (R, S) -submodul Noether di M .

BUKTI. Diketahui K dan L masing-masing merupakan (R, S) -submodul Noether di M . Akan dibuktikan bahwa $K + L$ juga merupakan (R, S) -submodul Noether di M . Pertama, dibentuk suatu fungsi f dengan definisi sebagai berikut:

$$f: K \oplus L \rightarrow K + L$$

$$(a, b) \mapsto f((a, b)) = a + b, \text{ untuk setiap } (a, b) \in K \oplus L.$$

Dapat ditunjukkan bahwa f merupakan isomorfisma (R, S) -modul, sehingga diperoleh bahwa $K \oplus L \cong K + L$. Oleh karena K dan L masing-masing merupakan (R, S) -submodul Noether, maka berdasarkan Proposisi 2.13 diperoleh bahwa $K \oplus L$ juga merupakan (R, S) -submodul Noether. Akibatnya, diperoleh bahwa $K + L$ juga merupakan (R, S) -submodul Noether. ■

3. (R, S) -MODUL ARTIN

Seperti halnya pada teori ring dan teori modul, sebelum mendefinisikan (R, S) -modul Artin, berikut disajikan definisi dari suatu (R, S) -modul yang memenuhi sifat rantai turun (*Descending Chain Condition* atau disingkat DCC) untuk (R, S) -submodul.

Definisi 3.1 Suatu (R, S) -modul M dikatakan memenuhi sifat rantai turun (*Descending Chain Condition* disingkat DCC) untuk (R, S) -submodul apabila untuk setiap rantai turun submodul-submodul dari (R, S) -modul M yaitu $P_1 \supseteq P_2 \supseteq P_3 \dots$, terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga untuk memenuhi $P_k = P_t$ untuk setiap $t \geq k$.

Setelah mengetahui definisi sifat rantai turun untuk (R, S) -submodul, berikut disajikan definisi dari (R, S) -modul Artin beserta contohnya.

Definisi 3.2 Suatu (R, S) -modul M disebut (R, S) -modul Artin apabila M memenuhi sifat rantai turun (DCC) untuk (R, S) -submodul.

Contoh 3.3. Suatu (R, S) -modul sederhana merupakan (R, S) -modul Artin karena (R, S) -submodulnya hanya $\{0\}$ dan dirinya sendiri. Misalnya $\mathbb{Z}_7$ merupakan $(3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$ -modul Artin.

Contoh 3.4. Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -modul bukan merupakan $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -modul Artin. Hal ini dikarenakan terdapat rantai terdapat rantai turun berbentuk $\mathbb{Z} \supseteq 2\mathbb{Z} \supseteq 4\mathbb{Z} \supseteq 8\mathbb{Z} \supseteq \dots$ yang tidak stationer.

Selanjutnya, seperti halnya dalam koleksi submodul-submodul dari suatu R -modul yang tak kosong, di dalam koleksi submodul-submodul dari suatu (R, S) -modul yang tak kosong juga dapat ditemukan elemen minimal.

Definisi 3.5 Suatu modul M dikatakan memenuhi kondisi minimal pada (R, S) -submodul apabila untuk setiap koleksi submodul-submodul dari (R, S) -modul M yang tak kosong memuat suatu (R, S) -submodul yang minimal, yaitu (R, S) -submodul yang tidak memuat (R, S) -submodul lain dalam koleksi submodul-submodul dari (R, S) -modul M .

Diperhatikan bahwa suatu elemen P di (R, S) -modul M disebut elemen minimal jika tidak terdapat (R, S) -submodul N di M sehingga $N \subset P$. Berikut diberikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R, S) -modul membentuk (R, S) -modul Artin.

Teorema 3.6. Suatu (R, S) -modul M merupakan (R, S) -modul Artin jika dan hanya jika M memenuhi kondisi minimal.

BUKTI. Diketahui M merupakan (R, S) -modul Artin. Akan ditunjukkan bahwa M memenuhi kondisi minimal. Misalkan $\mathcal{K}$ merupakan koleksi submodul-submodul di (R, S) -modul M . Diambil sebarang $M_1 \in \mathcal{K}$. Jika M_1 merupakan elemen minimal di $\mathcal{K}$, maka terbukti. Namun jika M_1 bukan elemen minimal di $\mathcal{K}$, maka terdapat $M_2 \in \mathcal{K}$ sedemikian sehingga memenuhi $M_1 \supseteq M_2$. Jika M_2 elemen minimal di $\mathcal{K}$, maka terbukti. Namun jika M_2 bukan elemen minimal di $\mathcal{K}$, maka terdapat M_3 sedemikian sehingga $M_2 \supseteq M_3$. Proses ini dilanjutkan hingga diperoleh suatu rantai turun dari submodul-submodul di (R, S) -modul M . Karena diketahui bahwa M merupakan (R, S) -modul Artin, maka terdapat elemen $k \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga memenuhi $M_k = M_t$ untuk setiap $t \geq k$. Dengan

demikian proses di atas akan berhenti pada langkah ke- k , sehingga M_k tidak memuat (R, S) -submodul lain yang berada di $\mathcal{K}$. Dengan kata lain, terbukti bahwa M memenuhi kondisi minimal. Sebaliknya, diketahui M memenuhi kondisi minimal, akan dibuktikan bahwa M merupakan (R, S) -modul Artin. Misalkan $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \dots$ merupakan sebarang rantai turun dari submodul-submodul di (R, S) -modul M . Dari sini diperoleh himpunan $\mathcal{K} = \{M_i | M_i \text{ merupakan } (R, S) \text{ - submodul di } M\}$ yaitu koleksi submodul-submodul di (R, S) -modul M . Oleh karena diketahui bahwa M memenuhi kondisi minimal, maka terdapat M_k sedemikian sehingga $M_t \not\subseteq M_k$ untuk setiap $M_t \in \mathcal{K} \setminus M_k$. Akibatnya diperoleh $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_k = M_{k+1} = \dots$. Jadi diperoleh bahwa M memenuhi kondisi rantai turun (DCC) untuk (R, S) -submodul. Dengan demikian, terbukti bahwa M merupakan (R, S) -modul Artin.

Akibat 3.7. Setiap (R, S) -modul Artin tak nol memuat suatu elemen minimal.

BUKTI. Dengan menggunakan Teorema 3.6, maka diperoleh bahwa setiap (R, S) -modul Artin tak nol memenuhi kondisi minimal. Akibatnya, setiap (R, S) -modul Artin suatu elemen minimal. ■

Pada teori modul, diketahui bahwa setiap submodul dari suatu modul Artin juga merupakan modul Artin. Sifat ini ternyata juga berlaku untuk (R, S) -modul Artin sebagai berikut.

Proposisi 3.8 Diberikan M merupakan (R, S) -modul Artin. Setiap (R, S) -submodul di M juga merupakan (R, S) -modul Artin.

BUKTI. Diketahui bahwa M merupakan (R, S) -modul Artin. Diambil sebarang (R, S) -submodul N di M , maka setiap (R, S) -submodul di N juga merupakan (R, S) -submodul di M . Dengan demikian, N juga memenuhi sifat rantai turun (DCC) untuk (R, S) -submodul. Jadi, terbukti bahwa N juga merupakan (R, S) -modul Artin. Karena pengambilan (R, S) -submodul N sebarang, maka terbukti bahwa setiap (R, S) -submodul di M juga merupakan (R, S) -modul Artin.

Selanjutnya, berikut disajikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R, S) -modul faktor membentuk (R, S) -modul Artin.

Proposisi 3.9. Diberikan (R, S) -modul M dan (R, S) -submodul N di M . M merupakan (R, S) -modul Artin jika dan hanya jika N dan M/N juga merupakan (R, S) -modul Artin.

BUKTI. Diketahui M merupakan (R, S) -modul Artin, maka berdasarkan proposisi 3.8 diperoleh bahwa N juga merupakan (R, S) -modul Artin. Selanjutnya, dibentuk (R, S) -modul faktor M/N . Misalkan $(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq (M_3 + N)/N \supseteq \dots$ merupakan sebarang rantai turun dari submodul-submodul di (R, S) -modul M/N . Akibatnya, dari sini diperoleh $(M_1 + N) \supseteq (M_2 + N) \supseteq (M_3 + N) \supseteq \dots$ merupakan rantai turun dari submodul-submodul di (R, S) -modul M . Karena M merupakan (R, S) -modul Artin, maka M memenuhi sifat rantai turun (R, S) -submodul. Berarti terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga memenuhi $M_k + N = M_t + N$ untuk setiap $t \geq k$. Akibatnya, berarti untuk rantai naik $(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq (M_3 + N)/N \supseteq \dots$ juga terdapat terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga memenuhi $(M_k + N)/N = (M_t + N)/N$ untuk setiap $t \geq k$. Jadi, M/N juga memenuhi sifat rantai turun (R, S) -submodul. Dengan kata lain, terbukti bahwa M/N merupakan (R, S) -modul Artin. Sebaliknya, diketahui N dan M/N merupakan (R, S) -modul Artin. Diberikan $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$ merupakan rantai turun dari submodul-submodul di (R, S) -modul M . Diperoleh $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq M_3 \cap N \supseteq \dots$ merupakan rantai turun dari submodul-submodul di N . Karena N merupakan (R, S) -modul Artin, terdapat bilangan bulat positif k sehingga $M_i \cap N = M_k \cap N$ untuk setiap $i \geq k$. Akibatnya, diperoleh $(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq (M_3 + N)/N \supseteq \dots$ merupakan rantai turun dari submodul-submodul di (R, S) -modul M/N . Karena M/N merupakan (R, S) -modul Artin, terdapat bilangan bulat positif p sehingga $(M_i + N)/N = (M_p + N)/N$ untuk setiap $i \geq p$. Selanjutnya, dipilih $n =$

$\max(k, p)$. Diperoleh $M_i \cap N = M_n \cap N$ dan $(M_i + N)/N = (M_n + N)/N$ untuk setiap $i \geq n$. Jika $i \geq n$ dan $x \in M_n$, maka $x + N \in (M_i + N)/N = (M_n + N)/N$, sehingga terdapat elemen $y \in M_i$ sedemikian sehingga memenuhi $x + N = y + N$. Dari sini, diperoleh $x - y \in N$. Karena $M_n \supseteq M_i$ diperoleh $x - y \in M_n \cap N = M_i \cap N$, untuk $i \geq n$. Jika $x - y = z \in M_i \cap N$, maka diperoleh $x = y + z \in M_i$, sehingga $M_i \supseteq M_n$. Jadi, diperoleh $M_i = M_n$ untuk setiap $i \geq n$. Jadi, terbukti bahwa M merupakan (R, S) -modul Artin. ■

Selanjutnya, dengan menggunakan konsep terkait homomorfisma (R, S) -modul, ternyata diperoleh sifat yang merupakan syarat cukup agar suatu hasil tambah langsung pada (R, S) -modul membentuk (R, S) -modul Artin.

Proposisi 3.10. Jika diberikan M dan N masing-masing merupakan (R, S) -modul Artin, maka hasil tambah langsung $M \oplus N$ juga merupakan (R, S) -modul Artin.

BUKTI. Diketahui M dan N masing-masing merupakan (R, S) -modul Artin. Akan dibuktikan bahwa hasil tambah langsung $M \oplus N$ juga merupakan (R, S) -modul Artin. Misalkan $K = M \oplus N$. Dibentuk suatu fungsi f dengan definisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f: K &\rightarrow N \\ (a, b) &\mapsto f((a, b)) = b, \text{ untuk setiap } (a, b) \in K. \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa f merupakan epimorfisma (R, S) -modul dengan $\ker f = M$. Berdasarkan Teorema 2.12, diperoleh $K/M \cong N$. Dengan kata lain, $M \oplus N \cong N$. Karena N merupakan (R, S) -modul Artin, maka terbukti bahwa $M \oplus N$ juga merupakan (R, S) -modul Artin. ■

Dengan menggunakan sifat di atas, dapat diturunkan sifat berikut ini.

Proposisi 3.11. Diberikan (R, S) -modul M . Jika diberikan K dan L masing-masing merupakan (R, S) -submodul Artin di M , maka $K + L$ juga merupakan (R, S) -submodul Artin di M .

BUKTI. Diketahui K dan L masing-masing merupakan (R, S) -submodul Artin di M . Akan dibuktikan bahwa $K + L$ juga merupakan (R, S) -submodul Artin di M . Pertama, dibentuk suatu fungsi f dengan definisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f: K \oplus L &\rightarrow K + L \\ (a, b) &\mapsto f((a, b)) = a + b, \text{ untuk setiap } (a, b) \in K \oplus L. \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa f merupakan isomorfisma (R, S) -modul, sehingga diperoleh bahwa $K \oplus L \cong K + L$. Oleh karena K dan L masing-masing merupakan (R, S) -submodul Artin, maka berdasarkan Proposisi 3.10 diperoleh bahwa $K \oplus L$ juga merupakan (R, S) -submodul Artin. Akibatnya, diperoleh bahwa $K + L$ juga merupakan (R, S) -submodul Artin. ■

4. KESIMPULAN

Konsep terkait modul Noether dan modul Artin dalam teori modul dapat dikembangkan ke dalam struktur (R, S) -modul. Beberapa sifat terkait modul Noether dan modul Artin mengalami perumuman di dalam (R, S) -modul. Namun, pengembangan ini terbatas pada kasus ring komutatif tanpa elemen satuan. Diharapkan penelitian ini dapat menjadi dasar bagi penelitian lanjutan untuk kasus ring sebarang (tidak harus komutatif dan memiliki elemen satuan). Lebih lanjut, adapun hasil dari penelitian ini kelak dapat digunakan sebagai dasar teori dalam penelitian terkait socle dan radikal Jacobson suatu (R, S) -modul.

ACKNOWLEDGEMENT

Semua penulis mengucapkan terima kasih kepada para reviewer atas komentar dan saran yang diberikan. Selain itu, penulis pertama menyampaikan terima kasih kepada Universitas Ahmad Dahlan yang telah mendanai penelitian ini melalui hibah penelitian dasar internal dengan nomor kontrak PD-133/SP3/LPPM-UAD/XI/2024.

REFERENCES

- [1] Yuwaningsih, D.A. & Wijayanti, I.E., 2015. On Jointly Prime Radicals of (R, S) -Modules, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, Vol.21, No.1, 25-34.
- [2] Yuwaningsih, D.A., Wijayanti, I.E., & Prasetyo, P.W., 2019. On (R, S) -Modules Homomorphisms. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf.Series*, Vol.1188, 012114.
- [3] Yuwaningsih, D.A., 2020. Hasil Tambah Langsung Suatu (R, S) -Modul. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, Vol.3, No.2, 98-106.
- [4] Wijayanti, I.E., Wahyuni, S., Yuwaningsih, D.A. & Hartanto, A.D., 2016. *Teori Ring dan Modul*. Gama Press UGM, Yogyakarta.
- [5] Khumrapussorn, T., Pianskool, S., & Hall, M., 2012. (R, S) -Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules. *International Mathematical Forum*, Vol.7, No.33, 1631-1643.
- [6] Adkins, W.A., 1992. *Algebra "An Approach via Module Theory"*. Springer-Verlag New York, Inc., USA.