

Dynamic Analysis of the SIRS Model with a Type III Holling Function on the Corrosion Distribution of Bridge Reinforcement Steel in Coastal Areas

Analisis Dinamik Model SIRS dengan Fungsi Holling Tipe III pada Penyebaran Korosi Baja Tulangan Jembatan di Wilayah Pesisir

Ahmadi

*Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan,
Universitas Islam Indonesia
Email: ahmadi@uii.ac.id*

Abstract

This study discusses the dynamics of corrosion spread on reinforced concrete bridge reinforcement in coastal areas using the SIRS mathematical model approach and considering the Holling type III function. The model built, can be seen how corrosion appears, spreads, and persists based on the influence of interaction parameters between healthy reinforcement and reinforcement that has experienced damage. In addition, this model can be analyzed dynamically including the equilibrium point, local stability and basic reproduction number. The simulation results show that when the basic reproduction number $R_0 < 1$, corrosion cannot persist and the system will return to a corrosion-free condition. However, when $R_0 > 1$, corrosion is able to spread and persist so that some of the reinforcing steel remains in a corroded condition. Parameter analysis shows that increasing the ratio of the corrosion propagation rate to the recovery rate significantly increases the likelihood of corrosion development and long-term persistence. This ratio represents the intensity of interaction between the reinforcement in good condition and the corroded reinforcement.

Keywords: Corrosion Propagation, Bridge Reinforcement, SIRS model, type III Holling function.

Abstrak

Penelitian ini membahas dinamika penyebaran korosi pada tulangan jembatan beton bertulang di wilayah pesisir dengan pendekatan model matematika SIRS dan mempertimbangkan fungsi Holling tipe III. Model yang dibangun, dapat dilihat bagaimana korosi muncul, menyebar, dan menetap berdasarkan pengaruh parameter interaksi antara tulangan sehat dan tulangan yang telah mengalami kerusakan. Selain itu, model ini dilakukan analisis dinamik yang meliputi titik ekuilibrium, kestabilan lokal dan bilangan reproduksi dasar. Hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$, korosi tidak dapat bertahan dan sistem akan kembali ke kondisi bebas korosi. Namun, ketika $R_0 > 1$, korosi mampu menyebar dan menetap sehingga sebagian baja tulangan tetap berada dalam kondisi terkorosi. Analisis parameter menunjukkan bahwa peningkatan



rasio laju penyebaran korosi terhadap laju pemulihan secara signifikan meningkatkan kemungkinan korosi untuk berkembang dan bertahan dalam jangka panjang. Rasio ini merepresentasikan intensitas interaksi antara tulangan yang masih dalam kondisi baik dan tulangan yang telah mengalami korosi.

Kata kunci: Penyebaran Korosi, Tulangan Jembatan, model SIRS, Fungsi Holling tipe III

1. PENDAHULUAN

Jembatan mempunyai peranan penting bagi sistem transportasi dan perekonomian masyarakat. Gangguan atau kerusakan pada jembatan dapat menimbulkan dampak besar terhadap mobilitas dan keselamatan publik. Studi tentang kerusakan jembatan menunjukkan bahwa korosi pada elemen baja dan tulangan beton merupakan salah satu penyebab utama degradasi struktur dan penurunan umur layanan jembatan [6]. Kondisi ini banyak terjadi di wilayah pesisir. Hal ini disebabkan oleh paparan klorida dari lingkungan laut. Korosi akibat paparan klorida yang terjadi pada satu bagian tulangan tidak hanya bersifat lokal, tetapi juga dapat mempengaruhi bagian lain melalui mekanisme elektrokimia dan keterhubungan fisik antar batang tulangan. Akibatnya, proses korosi dapat menyebar dari satu area ke area lainnya dan berkembang menjadi kerusakan yang lebih luas. Lebih lanjut, proses korosi pada struktur jembatan bersifat kompleks dan dipengaruhi oleh banyak faktor lingkungan, diantaranya faktor kelembapan, retakan pada selimut beton, sehingga kerusakan biasanya berkembang tak merata dan dapat menyebar dari titik awal ke bagian lain struktur. Oleh karena itu, pemahaman mekanisme dan pola penyebaran korosi sangat penting untuk merencanakan tindakan pemeliharaan yang efektif [7].

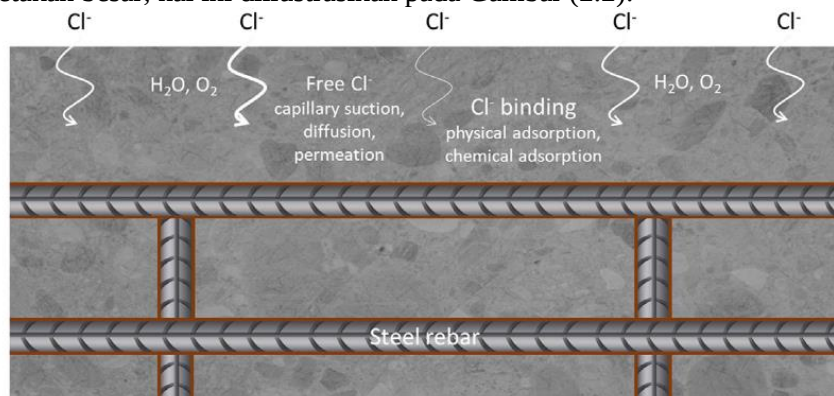
Pemodelan korosi merupakan bidang kajian yang terus berkembang, khususnya melalui penerapan pendekatan kuantitatif dan berbasis data. Di sisi lain, metode probabilistik, analisis reliabilitas waktu-bergantung, pemetaan korosi berbantuan citra, serta teknik prediksi berbasis data (mis. point-cloud 3D dan machine learning) banyak diusulkan untuk memetakan, memantau, dan memprediksi evolusi korosi pada elemen jembatan. Pendekatan ini bertujuan mengubah inspeksi tradisional menjadi strategi *predictive maintenance* yang lebih efisien [10]. Selain itu, penelitian tentang korosi pada jembatan di wilayah pesisir yang disebabkan oleh lingkungan di sekitar jembatan telah banyak dilakukan, diantaranya oleh [5, 9, 11, 14, 16]. Meskipun berbagai penelitian eksperimental telah dilakukan untuk mempelajari korosi pada beton bertulang, pendekatan matematis masih jarang digunakan padahal dapat memberikan pemahaman yang lebih sistematis mengenai bagaimana korosi muncul, menyebar, dan menetap dalam jangka panjang. Pendekatan ini memungkinkan analisis terhadap faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran korosi, terutama interaksi antara tulangan yang masih dalam kondisi bagus dengan tulangan yang telah mengalami korosi. Proses mekanisme ini mirip dengan proses penyebaran penyakit pada kasus epidemiologi. Lebih lanjut, populasi dibagi menjadi beberapa kelas yang kemudian dianalisis secara dinamik terkait penyebarannya.

Model penyebaran penyakit SIRS (*Susceptible - Infected - Recovered - Susceptible*) sangat cocok untuk menggambarkan fenomena korosi yang bersifat siklik, beberapa elemen setelah diperbaiki (*Recovered*) bisa kembali menjadi *Susceptible* karena berkurangnya efektivitas perbaikan atau pengaruh lingkungan yang berkelanjutan. Dengan merumuskan laju penyebaran korosi, laju efektivitas dan frekuensi perbaikan, serta laju kehilangan proteksi/efektivitas perbaikan (analogi kehilangan kekebalan) [2]. Sehingga dapat dilakukan analisis dinamik lebih mendalam seperti titik keseimbangan, bilangan reproduksi dasar, kestabilan lokal, dan sensitivitas terhadap parameter-parameter tersebut. Penelitian terkait model matematika SIRS sudah banyak diterapkan di berbagai bidang tidak hanya untuk kasus epidemiologi saja, diantaranya pada kasus penyebaran virus pada komputer maupun jaringan komputer [1, 4, 13, 12, 18]. Selain itu, model SIRS juga dapat diterapkan pada penyebaran hoax seperti penelitian yang dilakukan oleh [3, 8, 17].

Penelitian ini mengembangkan model matematis berbasis sistem persamaan diferensial biasa untuk mengkaji dinamika perkembangan korosi pada baja tulangan jembatan di wilayah pesisir. Laju korosi dimodelkan menggunakan fungsi Holling tipe III guna merepresentasikan efek kejenuhan dan respons nonlinier terhadap faktor lingkungan. Hal ini dipilih karena tidak semua bagian yang terekspose memiliki tingkat kerentanan yang sama terhadap korosi. Pada konsentrasi ion klorida tinggi, kecepatan penyebaran korosi cenderung jenuh, peningkatan ion klorida tidak selalu berbanding lurus dengan laju korosi, karena adanya batas reaksi difusi dan terbentuknya lapisan oksida pasif. Model ini, diharapkan dapat membantu merumuskan jadwal pemeliharaan dan strategi intervensi yang lebih terukur. Lebih lanjut, penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran kuantitatif mengenai perilaku penyebaran korosi pada struktur jembatan di wilayah pesisir serta menjadi landasan awal bagi upaya mitigasi, pemantauan, maupun pengambilan keputusan perawatan jembatan beton bertulang.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebuah jembatan di wilayah pesisir, setiap hari terkena paparan udara laut yang mengandung garam klorida (Cl^-), mengalami getaran akibat lalu lintas dan perubahan kelembaban. Akibat kondisi tersebut, ion klorida akan masuk melalui beton bagian luar dan mencapai baja tulangan serta menyebabkan korosi lokal pada baja seiring dengan berjalannya waktu. Korosi yang demikian akan menyebar ke area di sekitarnya dan menimbulkan retakan kecil pada beton yang membuka jalur penyebaran retakan besar, hal ini diilustrasikan pada Gambar (2.2).



Gambar 2.1 Ilustrasi Korosi pada Tulangan di Wilayah Pesisir Karena Garam Klorida (Cl^-) [15]

Dalam penelitian ini, populasi tulangan direpresentasikan dalam bentuk luasan yang mengalami korosi. Pendekatan ini sejalan dengan praktik rekayasa jembatan, di mana kelayakan tulangan tidak ditentukan secara langsung berdasarkan persentase permukaan yang mengalami korosi, melainkan berdasarkan kehilangan luas penampang efektif tulangan

$$A_{ef} = n \times \pi \left(\frac{d_{ef}}{2} \right)^2$$

dengan d_{ef} diameter tulangan yang mengalami korosi. Secara teknis, evaluasi kondisi tulangan dilakukan dengan prinsip yang sama seperti perhitungan luas tulangan pada beton bertulang, yaitu berdasarkan jumlah batang tulangan dan luas penampang masing-masing tulangan.

Di sisi lain, saat melakukan pengecekan di lapangan, kondisi korosi tulangan dinilai melalui kombinasi metode non-destruktif dan inspeksi lokal. Apabila diperlukan evaluasi kuantitatif, yakni beton penutup dicek (dengan cara dikupas) secara terbatas untuk mengukur diameter tulangan aktual menggunakan jangka sorong atau alat ukur ketebalan baja. Diameter hasil pengukuran tersebut kemudian digunakan untuk menghitung luas penampang efektif tulangan.

Berdasarkan uraian tersebut, dibahas penyebaran korosi pada baja tulangan jembatan di wilayah pesisir dengan adopsi dari model matematika penyebaran penyakit epidemiologi SIRS. Penelitian tersebut membahas tentang penyebaran penyakit menular antar individu satu dengan individu yang lain. Pada model SIRS populasi dibagi menjadi 3 kelas yang rentan, terinfeksi dan sembuh. Antar populasi dari rentan, terinfeksi dan sembuh saling berinteraksi satu sama lain dengan menerapkan beberapa asumsi. Model tersebut cocok diterapkan untuk memodelkan penyebaran korosi pada tulangan jembatan beton bertulang yang terpapar garam klorida di wilayah pesisir. Hal ini karena proses korosi pada satu bagian tulangan dapat mempengaruhi dan mempercepat terjadinya korosi pada bagian lainnya. Lebih lanjut, populasi pada penelitian ini dibagi menjadi 3 kelas, yakni

1. $S(T)$ merupakan luas permukaan penyebaran korosi tulangan masih utuh (tanpa retak, kadar ion klorida di bawah ambang 5%, kondisi ini terjadi pada jembatan yang baru selesai dibangun) yang berubah seiring dengan berjalannya waktu,
2. $I(T)$ merupakan luas permukaan penyebaran korosi tulangan yang sudah mulai berkarat(ratak halus) berubah seiring dengan berjalannya waktu, secara visual karat akan muncul di bagian permukaan tulangan,
3. $R(T)$ merupakan luas permukaan penyebaran korosi tulangan yang telah diperbaiki (penggantian ulang, penguatan CFRP(*Carbon Fiber Reinforced Polymer*)) berubah seiring dengan berjalannya waktu. Lebih lanjut, kelas $R(T)$ muncul karena proses perbaikan tulangan yang mengalami korosi tidak dapat mengembalikan tulangan ke kondisi seperti semula. Korosi yang terjadi dapat menghilangkan penampang tulangan dan kerusakan mikro yang bersifat permanen. Meski karat telah dibersihkan dan tulangan telah dilakukan perbaikan, kondisi mekanik dan ketahanannya belum identik dengan tulangan sehat. Selain itu, kondisi persekitaran tulangan yang mengalami korosi masih ada faktor kelembaban dan klorida umumnya masih ada setelah perbaikan, sehingga tulangan hasil perbaikan tetap memiliki potensi mengalami korosi ulang. Sehingga kelas $R(T)$ merepresentasikan kondisi tulangan yang telah diperbaiki tetapi masih rentan, yang secara realistis menjembatani transisi dari kondisi terkorosi menuju kondisi sehat.

Selanjutnya, didefinisikan beberapa variabel yang digunakan dalam pemodelan ini

Tabel 2.1 Parameter

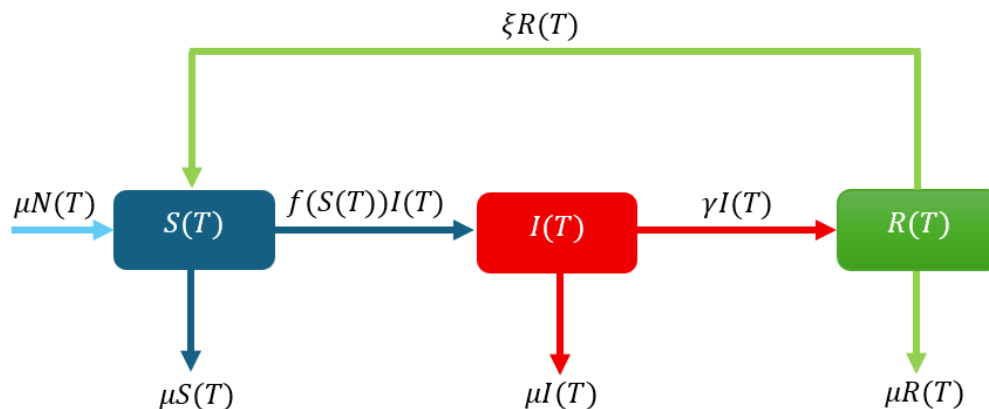
Notasi	Keterangan	Satuan
μ	Laju degradasi alami atau penggantian komponen. Misalnya tingkat penggantian struktur akibat umur atau kerusakan alami. Proses degradasi disebabkan oleh kelembaban, oksigen, karbon dioksida, dan ion klorida yang tetap bekerja sepanjang umur layanan struktur. Kondisi ini terjadi pada tulangan yang rentan, terkorosi, dan yang telah diperbaiki. Sehingga nilai μ dipandang sebagai laju dasar kehilangan material yang bersifat umum dan bekerja pada seluruh kelas, sementara perbedaan tingkat keparahan korosi dimodelkan melalui parameter transisi antar kelas [6].	$\frac{1}{\text{bulan}}$
β_0	Laju penyebaran korosi dari baja yang sudah terkorosi ke yang sehat. Misalnya akibat difusi ion klorida (Cl^-) atau kontak galvanik antar bagian logam. Jika nilai β_0 tinggi, maka korosi cepat menyebar di area tulangan	$\frac{1}{\text{mm}^2 \times \text{bulan}}$

	berdekatan. Hal yang sebaliknya juga terjadi ketika nilai β_0 kecil.	
$\bar{\alpha}$	Efek kejenuhan difusi klorida atau batas kemampuan ion korosif menembus beton. Semakin banyak bagian yang terkorosi, laju korosi bisa melambat karena ion sudah jenuh atau reaksi melambat di permukaan logam.	$\frac{1}{\text{bulan}}$
γ	Laju rehabilitasi struktur, misalnya perbaikan, pelapisan ulang, atau penutupan retak. Semakin besar γ , semakin cepat bagian terkorosi diperbaiki.	$\frac{1}{\text{bulan}}$
ξ	Laju penurunan efek proteksi. Misalnya, pelapis mulai rusak, lapisan pelindung retak, atau perlindungan katodik berhenti bekerja, sehingga elemen yang kelas <i>Recovered</i> kembali ke kelas <i>Rentan</i> .	$\frac{1}{\text{bulan}}$

Dalam pendekatan model ini, digunakan fungsi Holling tipe III sebagai representasi dari respons nonlinier sistem terhadap variabel yang diamati.

$$f(S(T)) = \frac{\beta_0 (S(T))^2}{1 + \bar{\alpha}(S(T))^2}$$

Motivasi penggunaan fungsi Holling tipe III adalah tidak semua bagian yang terekspose memiliki tingkat kerentanan yang sama terhadap korosi. Pada konsentrasi ion klorida tinggi, kecepatan penyebaran korosi cenderung jenuh, peningkatan ion klorida tidak selalu berbanding lurus dengan laju korosi, karena adanya batas reaksi difusi dan terbentuknya lapisan oksida pasif. Berdasarkan uraian tersebut, dapat dibuat diagram alir pada Gambar (2.2).



Gambar 2.2 Diagram Alir model Penyebaran Korosi pada Tulangan Jembatan di Wilayah Pesisir dan disusun sistem persamaan diferensial biasa berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS(T)}{dT} = \mu N(T) - \frac{\beta_0 (S(T))^2 I(T)}{1 + \bar{\alpha}(S(T))^2} - \mu S(T) + \xi R(T) \\ \frac{dI(T)}{dT} = \frac{\beta_0 (S(T))^2 I(T)}{1 + \bar{\alpha}(S(T))^2} - (\gamma + \mu) I(T) \\ \frac{dR(T)}{dT} = \gamma I(T) - \mu R(T) - \xi R(T) \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan total populasi $N(T) = S(T) + I(T) + R(T)$.

2.1. Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Pada bagian ini, Sistem (2.1) diubah menjadi *nondimensionless*, hal ini untuk mereduksi banyaknya parameter. Selain itu, motivasi dari langkah ini adalah mengubah luasan menjadi proporsi membuat model lebih umum, mudah dibandingkan, dan stabil secara matematis tanpa kehilangan makna fisiknya. Misalkan

$$s(t) = \frac{S(T)}{N(T)}, k(t) = \frac{I(T)}{N(T)}, r(t) = \frac{R(T)}{N(T)}$$

dan

$$t = \gamma T \rightarrow \frac{d(\cdot)}{dT} = \gamma \frac{d(\cdot)}{dt}$$

$$\beta_1 = \beta_0 (N(T))^2, \quad \alpha = \bar{\alpha}(N(T))^2, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\gamma}, \quad m = \frac{\mu}{\gamma}, \quad \rho = \frac{\xi}{\gamma}$$

Sehingga Sistem (2.1) menjadi

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = m - \frac{\beta(s(t))^2 k(t)}{1 + \alpha(s(t))^2} - ms(t) + \rho r(t) \\ \frac{dk(t)}{dt} = \frac{\beta(s(t))^2 k(t)}{1 + \alpha(s(t))^2} - (1 + m)k(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = k(t) - (\rho + m)r(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Selanjutnya, ditentukan titik ekuilibrium dari Sistem (2.2). Titik ekuilibrium akan terjadi ketika nilai dari sistem tidak bergantung pada waktu $\left(\frac{ds(t)}{dt} = \frac{dk(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} = 0\right)$, sehingga Sistem (2.2) menjadi

$$\begin{cases} 0 = m - \frac{\beta(s^*)^2 k^*}{1 + \alpha(s^*)^2} - ms^* + \rho r^* \\ 0 = \frac{\beta(s^*)^2 k^*}{1 + \alpha(s^*)^2} - (1 + m)k^* \\ 0 = k^* - (\rho + m)r^* \end{cases} \quad (2.3)$$

Dalam penelitian ini, terdapat dua jenis titik ekuilibrium, yakni titik ekuilibrium bebas korosi dan terdegradasi korosi.

A. Titik Ekuilibrium Bebas Korosi

Titik ekuilibrium ini terjadi ketika nilai dari proporsi kelas tulangan yang mengalami korosi akan bernilai nol. Dengan kata lain, nilai dari $k^* = 0$, sehingga Sistem (2.3) menjadi

$$\begin{cases} 0 = m - ms^* + \rho r^* \\ 0 = -(\rho + m)r^* \end{cases} \quad (2.4)$$

Apabila Sistem (2.4) diselesaikan, maka didapatkan

$$E_1 = (s_1^*, k_1^*, r_1^*) = (1, 0, 0)$$

Nilai ini berarti bahwa semua elemen struktur tulangan jembatan di wilayah pesisir belum mengalami korosi. Lebih lanjut, tidak ada elemen struktur tulangan jembatan yang terkorosi aktif dan tidak perlu perbaikan. Hal ini dapat terjadi karena jembatan tersebut baru selesai dibangun.

B. Titik Ekuilibrium Terdegradasi Korosi

Titik ekuilibrium terdegradasi korosi adalah suatu kondisi di mana sebagian elemen sudah mengalami korosi/kerusakan dan bertahan stabil. Berdasarkan persamaan ketiga Sistem (2.3) didapatkan

$$k^* - (\rho + m)r^* = 0 \rightarrow k^* = (\rho + m)r^* \quad (2.5)$$

dan persamaan kedua Sistem (2.3) dapat dituliskan sebagai berikut

$$k^* = 0 \text{ atau } \frac{\beta(s^*)^2}{1 + \alpha(s^*)^2} - (1 + m) = 0$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\beta(s^*)^2}{1 + \alpha(s^*)^2} - (1 + m) &= 0 \\ \beta(s^*)^2 &= (1 + m)(1 + \alpha(s^*)^2) \\ (s^*)^2 &= \frac{1 + m}{\beta - (1 + m)\alpha} \end{aligned}$$

Karena nilai dari $s^* > 0$, sehingga nilai yang memenuhi adalah

$$s^* = \sqrt{\frac{1 + m}{\beta - (1 + m)\alpha}} \text{ dengan } \beta > (1 + m)\alpha \quad (2.6)$$

Apabila Persamaan (2.5) dan Persamaan (2.6) disubstitusikan ke persamaan pertama dari Sistem (2.3), maka didapatkan

$$r^* = \frac{m(s^* - 1)}{\rho} + \frac{\beta(s^*)^2 k^*}{\rho(1 + \alpha(s^*)^2)}$$

Sehingga titik ekuilibrium terdegradasi adalah

$$E_2 = (s_2^*, k_2^*, r_2^*) = (s^*, k^*, r^*)$$

dengan

$$s^* = \sqrt{\frac{1+m}{\beta - (1+m)\alpha}}$$

$$k^* = (\rho + m)r^*$$

$$r^* = \frac{m(s^* - 1)}{\rho} + \frac{\beta(s^*)^2 k^*}{\rho(1 + \alpha(s^*)^2)}$$

Hal ini berarti bahwa suatu kondisi stabil di mana korosi tetap ada pada tingkat tertentu (tidak meningkat, tidak hilang).

C. Bilangan Reproduksi Dasar

Motivasi dari penentuan bilangan reproduksi dasar adalah untuk menganalisis seberapa besar kemampuan satu daerah yang telah mengalami korosi dapat menyebabkan daerah korosi baru yang ada di sekitarnya. Lebih lanjut, variabel yang berpengaruh dalam proses penambahan dan pengurangan korosi pada tulangan jembatan adalah variabel $k(t)$ yang dituliskan sebagai berikut

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{\beta(s(t))^2 k(t)}{1 + \alpha(s(t))^2} - (1+m)k(t)$$

Komponen yang menyebabkan korosi bertambah adalah

$$\mathcal{F} = \frac{\beta(s(t))^2 k(t)}{1 + \alpha(s(t))^2} \rightarrow F(E_1) = \frac{d\mathcal{F}}{dk(t)} = \frac{\beta}{1 + \alpha}$$

dan komponen yang menyebabkan korosi berkurang adalah

$$\mathcal{M} = (1+m)k(t) \rightarrow \mathcal{H}(E_1) = \frac{d\mathcal{M}}{dk(t)} = 1+m$$

Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = F\mathcal{H}^{-1} = \frac{\beta}{(1+\alpha)(1+m)}$$

Ketika nilai dari $R_0 < 1$, maka sistem akan menuju ke titik ekuilibrium bebas korosi. Akan tetapi ketika nilai dari $R_0 > 1$, maka sistem akan menuju ke titik ekuilibrium terdegradasi.

2.2. Analisis Sensitifitas Parameter

Analisis parameter pada model penyebaran korosi dilakukan untuk melakukan analisis bagaimana perubahan nilai parameter memengaruhi dinamika penyebaran korosi pada tulangan jembatan. Dengan menganalisis parameter, dapat ditentukan sejauh mana korosi dapat menyebar atau tidak (melalui bilangan reproduksi dasar R_0), dapat melakukan prediksi luasan korosi yang sudah terjadi, dan mengetahui strategi intervensi apa yang paling efektif untuk mengendalikan penularan. Lebih lanjut, pada bagian sebelumnya, sudah didapatkan bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta}{(1 + \alpha)(1 + m)}$$

Artinya parameter yang berpengaruh adalah β, α dan m . Sehingga untuk mengetahui parameter mana yang paling berpengaruh, perhatikan analisis berikut

$$\begin{aligned}\Delta_x^{R_0} &= \frac{x}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial x} \\ \Delta_\beta^{R_0} &= \frac{\beta}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \beta} = 1 \\ \Delta_\alpha^{R_0} &= \frac{\alpha}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} \\ \Delta_m^{R_0} &= \frac{m}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial m} = -\frac{m}{1 + m}\end{aligned}$$

Karena nilai dari $\alpha, m > 0$, sehingga nilai dari $\Delta_\alpha^{R_0}, \Delta_m^{R_0} < 0$. Dengan kata lain, parameter α dan m tidak berpengaruh signifikan terhadap perubahan sistem. Lebih lanjut, karena nilai dari $\Delta_\beta^{R_0} > 0$ sehingga parameter β berpengaruh signifikan terhadap Sistem (2.2). Untuk simulasi numerik dari analisis ini dapat diperhatikan pada Gambar (2.5) dan Gambar (2.6).

2.3. Analisis Kestabilan Lokal

Sistem (2.2) termasuk sistem persamaan diferensial nonlinear, sehingga untuk menentukan penyelesaiannya secara analitik akan sulit. Akibatnya, hal yang mungkin adalah melakukan linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Ide utama dari langkah linearisasi adalah mentransformasi titik ekuilibrium yang sudah didapatkan di subbab sebelumnya ke titik asal $O(0,0,0)$ dengan ekspansi Taylor. Misalkan

$$\begin{aligned}f_1(s(t), k(t), r(t)) &= m - \frac{\beta(s(t))^2 k(t)}{1 + \alpha(s(t))^2} - ms(t) + \rho r(t) \\ f_2(s(t), k(t), r(t)) &= \frac{\beta(s(t))^2 k(t)}{1 + \alpha(s(t))^2} - (1 + m)k(t) \\ f_3(s(t), k(t), r(t)) &= k(t) - (\rho + m)r(t)\end{aligned}$$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor, sehingga didapatkan

$$\begin{pmatrix} \frac{ds(t)}{dt} \\ \frac{dk(t)}{dt} \\ \frac{dr(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(s^*, k^*, r^*)}{\partial s} & \frac{\partial f_1(s^*, k^*, r^*)}{\partial k} & \frac{\partial f_1(s^*, k^*, r^*)}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2(s^*, k^*, r^*)}{\partial s} & \frac{\partial f_2(s^*, k^*, r^*)}{\partial k} & \frac{\partial f_2(s^*, k^*, r^*)}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3(s^*, k^*, r^*)}{\partial s} & \frac{\partial f_3(s^*, k^*, r^*)}{\partial k} & \frac{\partial f_3(s^*, k^*, r^*)}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(t) - s^* \\ k(t) - k^* \\ r(t) - r^* \end{pmatrix}$$

Misalkan

$$u(t) = s(t) - s^*, \quad v(t) = k(t) - k^*, \quad w(t) = r(t) - r^*$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dw(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(s^*, k^*, r^*)}{\partial s} & \frac{\partial f_1(s^*, k^*, r^*)}{\partial k} & \frac{\partial f_1(s^*, k^*, r^*)}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2(s^*, k^*, r^*)}{\partial s} & \frac{\partial f_2(s^*, k^*, r^*)}{\partial k} & \frac{\partial f_2(s^*, k^*, r^*)}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3(s^*, k^*, r^*)}{\partial s} & \frac{\partial f_3(s^*, k^*, r^*)}{\partial k} & \frac{\partial f_3(s^*, k^*, r^*)}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

Persamaan terakhir inilah yang disebut dengan bentuk linear dari bentuk nonlinear Sistem (2.2). Lebih lanjut, dengan konsep tersebut, sehingga Sistem (2.2) menjadi

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial k} & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial k} & \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial k} & \frac{\partial f_3}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 - m & -a_2 & \rho \\ a_1 & a_2 - a_3 & 0 \\ 0 & 1 & -a_4 \end{pmatrix}$$

dengan

$$a_1 = \frac{2\beta s^* k^*}{(1 + \alpha(s^*)^2)^2}, a_2 = \frac{\beta(s^*)^2}{1 + \alpha(s^*)^2}, a_3 = 1 + m, a_4 = \rho + m$$

Selanjutnya, matriks jacobian J dicari nilai eigennya dengan formula

$$\begin{vmatrix} -a_1 - m - \lambda & -a_2 & \rho \\ a_1 & a_2 - a_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -a_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-a_4 - \lambda)((-a_1 - m - \lambda)(a_2 - a_3 - \lambda) + a_1 a_2) + a_1 \rho = 0$$

dan didapatkan persamaan karakteristik

$$-\lambda^3 + a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda + a_{13} = 0 \quad (2.7)$$

dengan

$$a_5 = -a_1 - m, a_6 = a_2 - a_3, a_7 = a_1 a_2, a_8 = a_1 \rho, a_9 = a_5 a_6, a_{10} = a_5 + a_6, a_{11} = a_{10} - a_4, a_{12} = a_4 a_{10} - a_9, a_{13} = a_8 - a_4 a_9.$$

2.3.1 Kestabilan Lokal Titik Ekulibirum Bebas Korosi

Apabila nilai eigen yang sudah didapatkan pada bagian (2.3) disubstitusikan titik ekuilibirum bebas korosi E_1 , sehingga

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{\beta}{1 + \alpha}, a_3 = 1 + m, a_4 = \rho + m,$$

Akibatnya, diperoleh persamaan

$$(a_2 - a_3 - \lambda)(\lambda^2 + (a_4 + m)\lambda + a_4 m) = 0$$

$$\lambda_1 = a_2 - a_3 \quad \text{atau} \quad \lambda_{2,3} = \frac{-(a_4 + m) \pm \sqrt{(a_4 + m)^2 - 4a_4m}}{2}$$

Lebih lanjut, Sistem (2.2) di sekitar titik ekuilibrium bebas korosi tidak stabil (karena ada bagian real dari nilai eigen yang positif). Di sisi lain, ketika bagian real dari nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ akan negatif, sehingga Sistem (2.2) di sekitar titik ekuilibrium bebas korosi akan stabil asimtotik lokal. Untuk simulasi numerik dari analisis ini dapat diperhatikan pada bagian (2.4.A).

2.3.2 Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Terdegradasi Korosi

Apabila nilai eigen yang sudah didapatkan pada bagian (2.3) disubstitusikan titik ekuilibrium terdegradasi korosi E_2 dan mengingat nilai parameter dari $m, \beta, \alpha, \rho > 0$ serta

$$\beta - (1 + m)\alpha > 0$$

$$\frac{m(s^* - 1)}{\rho} + \frac{\beta(s^*)^2 k^*}{\rho(1 + \alpha(s^*)^2)} > 0$$

Selanjutnya, Persamaan (2.7) dianalisis dengan kriteria Routh - Hurwitz

Koefisien λ^3	-1	a_{12}
Koefisien λ^2	a_{11}	a_{13}
Koefisien λ^1	$b_1 = \frac{a_{11} \cdot a_{12} + a_{13}}{a_{11}}$	0
Koefisien λ^0	a_{13}	

Berdasarkan kriteria Routh - Hurwitz, sistem akan stabil asimtotik lokal ketika nilai-nilai di kolom kedua bertanda sama. Karena nilai di baris pertama, kolom kedua negatif (-1), sehingga sistem akan asimtotik stabil lokal, ketika $a_{11} < 0, b_1 < 0, a_{13} < 0$. Untuk simulasi numerik dari analisis ini dapat diperhatikan Gambar (2.4.B).

2.4. Simulasi model

Pada bagian ini, simulasi numerik digunakan untuk memberikan ilustrasi dan melakukan verifikasi terkait analisis yang sudah dilakukan pada bagian sebelumnya yakni penentuan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, kestabilan lokal dari sistem.

A. Simulasi Model SIRS Bebas Korosi

Pada simulasi ini, diambil

$$\mu = 0,0005, \quad \beta_0 = 6,9 \times 10^{-8}, \quad \bar{\alpha} = 5,5 \times 10^{-8}, \quad \xi = 0,001, \quad \gamma = 0,01$$

Sehingga didapatkan $\beta = 0,025, \alpha = 0,002, m = 0,05, \rho = 0,001$ dan nilai awal $(S(0), I(0), R(0)) = (89; 10; 1)$, sehingga didapatkan bilangan reproduksi dasar $R_0 = 0,0237$. Apabila parameter tersebut disubstitusikan ke analisis pada bagian (2.3.1), maka didapatkan

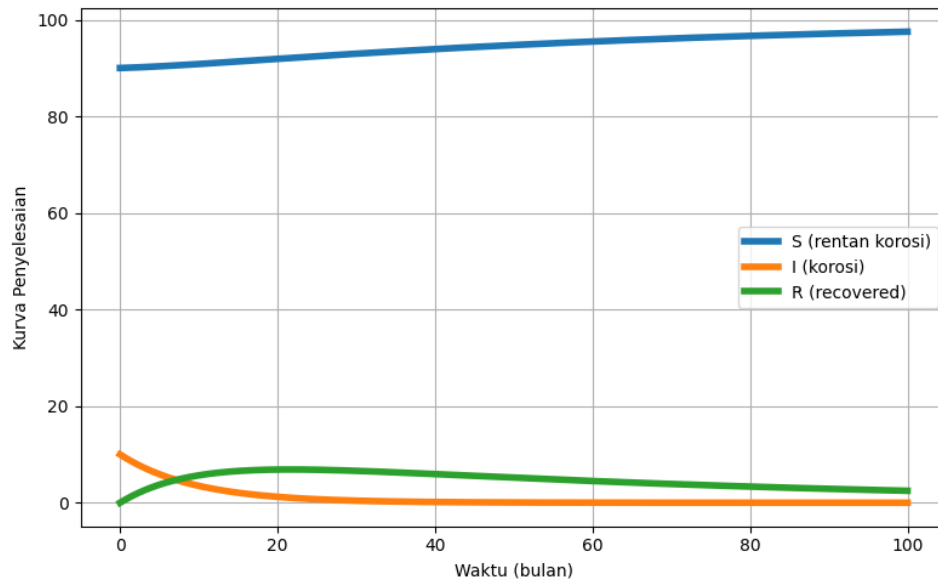
$$a_1 = 0, a_2 = 0,02083, a_3 = 1,05, a_4 = 0,15$$

dan

$$-\lambda^3 - 1,126\lambda^2 - 0,10608\lambda - 0,00261 = 0$$

$$\lambda_1 = -1,025 \text{ atau } \lambda_2 = -0,050 \text{ atau } \lambda_3 = -0,050$$

dengan kata lain, Sistem (2.2) di sekitar titik ekuilibrium bebas korosi akan stabil asimtotik lokal, sehingga diperoleh grafik simulasi seperti pada Gambar (2.3).



Gambar 2.3. Kurva Penyelesaian di Sekitar Titik Ekuilibrium Bebas Korosi

Pada Gambar (2.3), luasan tulangan rentan korosi cenderung meningkat secara perlahan seiring waktu dan mendekati nilai stabil. Luasan tulangan yang mengalami korosi pada awal waktu relatif tinggi, kemudian menurun cepat hingga mendekati nol. Sementara itu, luasan tulangan *recovered* meningkat pada awal waktu, mencapai nilai maksimum, lalu menurun perlahan dan menuju kondisi stabil.

B. Simulasi Model SIRS Terdegradasi Korosi

Pada simulasi ini, diambil

$$\mu = 0,0005, \quad \beta_0 = 0,000025, \quad \bar{\alpha} = 0,0002, \quad \xi = 0,001, \quad \gamma = 0,01$$

Sehingga didapatkan $\beta = 5,5, \alpha = 0,4, m = 0,8, \rho = 0,5$ dan nilai awal $(S(0), I(0), R(0)) = (60; 30; 10)$, sehingga didapatkan bilangan reproduksi dasar $R_0 = 2,18$. Apabila parameter tersebut disubstitusikan ke analisis pada bagian (2.3.1), maka didapatkan

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,6910, & a_2 &= 1,1121, & a_3 &= 1,8, & a_4 &= 1,2, & a_5 &= -1,491, \\ a_6 &= -0,687, & a_7 &= 0,768, & a_8 &= 0,3455, & a_9 &= 1,025, \\ a_{10} &= -2,1788, & a_{11} &= -3,4788, & a_{12} &= -3,8581, \\ a_{13} &= -0,9877, & b_1 &= -3,5741 \end{aligned}$$

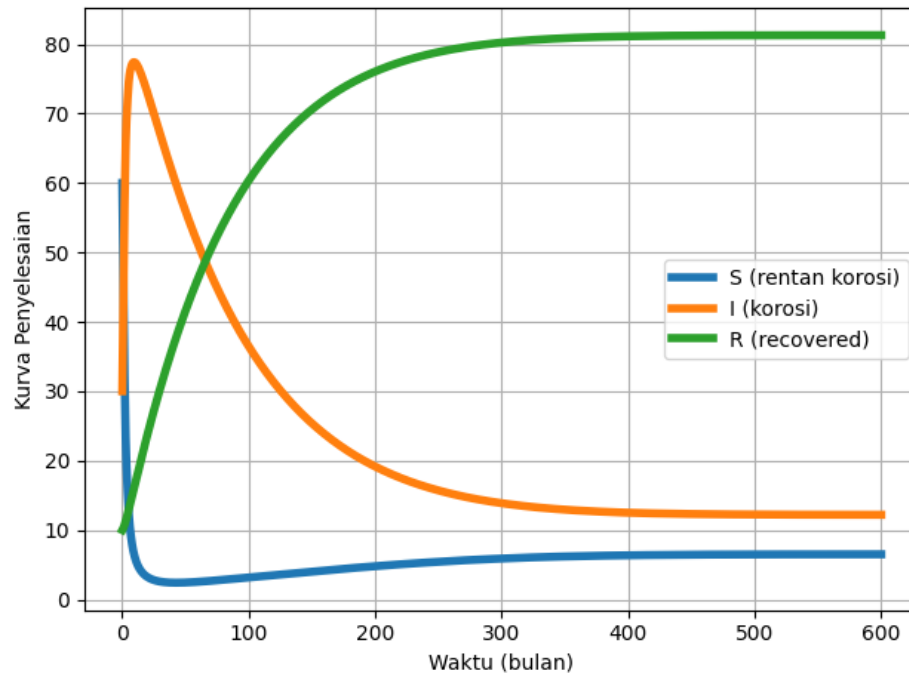
Sehingga didapatkan persamaan karakteristik

$$-\lambda^3 - 3,478\lambda^2 - 3,8581\lambda - 0,9877 = 0$$

dan nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = -0,3616 \text{ atau } \lambda_2 = -1,5581 - 0,550i \text{ atau } \lambda_3 = -1,5581 + 0,550i$$

Karena semua bagian real dari nilai eigennya negatif, sehingga titik ekuilibrium terdegradasi korosi akan stabil asimtotik lokal. Lebih lanjut, grafik simulasi dapat diperhatikan Gambar (2.4).

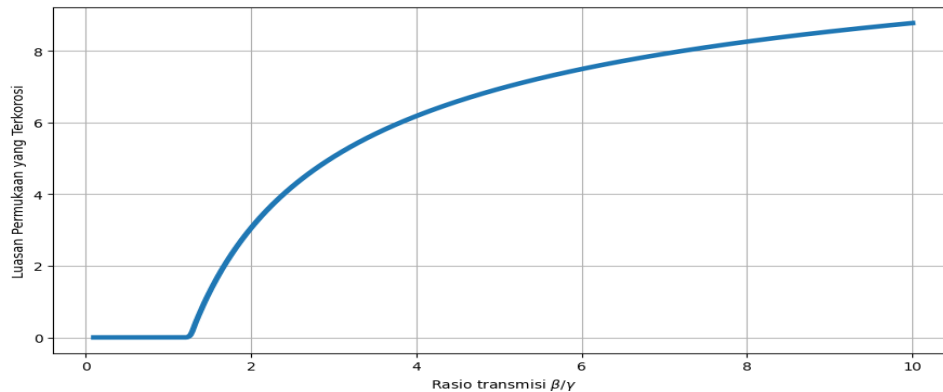


Gambar 2.4. Kurva penyelesaian di sekitar titik ekuilibrium terdegradasi korosi

Pada Gambar (2.4), luasan tulangan rentan korosi pada awal waktu menurun cepat karena sebagian tulangan beralih menjadi terkorosi, kemudian menetap pada nilai tertentu yang tidak nol. Luasan tulangan yang mengalami korosi awalnya meningkat, menunjukkan berkembangnya korosi, lalu menurun secara bertahap dan akhirnya konvergen akibat proses pemulihan. Sementara itu, luasan tulangan *recovered* terus meningkat seiring waktu dan mencapai kondisi stabil, yang menandakan tercapainya keseimbangan jangka panjang dari sistem.

C. Perilaku rasio β/γ dengan Kelas Korosi

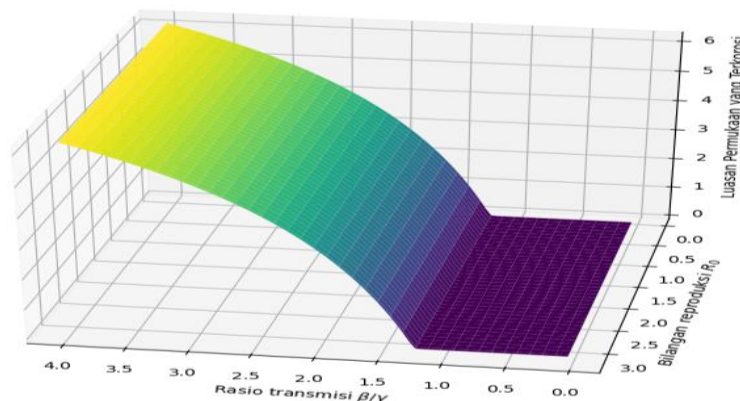
Untuk memahami pengaruh tingkat kerusakan akibat korosi terhadap dinamika sistem yang dimodelkan, diperlukan analisis komparatif terhadap parameter kunci yang merepresentasikan laju perkembangan korosi. Sehingga pada bagian ini dilakukan simulasi antara rasio β/γ terhadap kelas korosi yang berbeda seperti pada Gambar (2.5).



Gambar 2.5. Rasio Transmisi β/γ dengan luas permukaan yang mengalami korosi

Gambar (2.5) menunjukkan hubungan antara tingkat korosi, yang dinyatakan melalui rasio transmisi β/γ , dan luasan permukaan tulangan yang mengalami korosi pada kondisi jangka panjang. Pada nilai β/γ yang masih rendah, hampir tidak terlihat adanya korosi. Hal ini menunjukkan bahwa dalam kondisi lingkungan (kelembaban, suhu) yang relatif ringan, proses korosi belum mampu berkembang secara berkelanjutan sehingga tulangan masih berada dalam kondisi aman. Di sisi lain, ketika nilai β/γ meningkat dan melewati suatu batas tertentu, luasan korosi mulai muncul dan bertambah dengan cepat. Kondisi ini menandakan bahwa lingkungan sudah cukup agresif sehingga korosi tidak lagi bersifat sementara, tetapi mulai menyebar dan menetap pada permukaan tulangan. Pada tahap ini, peningkatan kecil pada tingkat keparahan lingkungan dapat menyebabkan pertambahan korosi yang cukup signifikan. Lebih lanjut, korosi mulai berkembang setelah melewati ambang tertentu, kemudian meningkat dengan cepat, dan akhirnya melambat. Simulasi tersebut menegaskan pentingnya upaya pencegahan sejak dini, karena pengendalian korosi sebelum melewati titik kritis jauh lebih efektif dibandingkan penanganan setelah korosi telah berkembang luas.

D. Grafik 3 Dimensi dari nilai β/γ Vs R_0 Vs Luasan Korosi



Gambar 2.6. Rasio transmisi β/γ , R_0 (bilangan reproduksi dasar), dengan I (luas permukaan yang mengalami korosi)

Gambar (2.6) menunjukkan bahwa korosi dipengaruhi secara bersamaan oleh kondisi lingkungan dan kemampuan korosi untuk mempertahankan dirinya. Pada bagian grafik dengan nilai β/γ dan R_0 yang rendah, luasan permukaan tulangan yang mengalami korosi cenderung mendekati nol. Ini menunjukkan bahwa ketika kondisi lingkungan masih relatif ringan dan korosi belum mampu berkembang secara berkelanjutan, hampir tidak ada luasan tulangan yang mengalami korosi. Dalam kondisi ini, tulangan masih berada dalam keadaan aman. Akan tetapi, ketika nilai β/γ dan R_0 meningkat dan melewati batas tertentu, permukaan grafik naik dengan cukup tajam. Hal ini menandakan bahwa korosi mulai muncul dan menyebar secara signifikan. Lingkungan pada tahap ini sudah cukup agresif, sehingga proses korosi tidak lagi bersifat sementara, tetapi dapat bertahan dan berkembang dalam jangka panjang. Lebih lanjut, permukaan tulangan yang korosi dipengaruhi oleh kombinasi antara tingkat keparahan lingkungan dan kemampuan penyebaran korosi itu sendiri. Korosi mulai berkembang setelah melewati ambang tertentu, kemudian meningkat dengan cepat, dan akhirnya melambat ketika mendekati kondisi maksimum.

3. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa.

1. Model tersebut mempunyai satu titik ekuilibrium bebas korosi

$$E_1 = (s_1^*, k_1^*, r_1^*) = (1, 0, 0)$$

dan satu titik ekuilibirum terdegradasi korosi

$$E_2 = (s_2^*, k_2^*, r_2^*) = (s^*, k^*, r^*)$$

dengan

$$s^* = \sqrt{\frac{1+m}{\beta - (1+m)\alpha}}, \quad k^* = (\rho + m)r^*, \quad r^* = \frac{m(s^* - 1)}{\rho} + \frac{\beta(s^*)^2 k^*}{\rho(1 + \alpha(s^*)^2)}$$

serta bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta}{(1 + \alpha)(1 + m)}$$

Selain itu, parameter yang paling berpengaruh dalam model ini adalah parameter β . Lebih lanjut, sistem akan stabil asimtotik lokal di sekitar titik ekuilibirum terjadi ketika $a_{11} < 0, b_1 < 0, a_{13} < 0$.

2. Ketika nilai R_0 kurang dari 1, proses korosi tidak mampu bertahan dalam jangka panjang. Meskipun pada tahap awal terdapat bagian tulangan yang mulai mengalami karat, korosi tersebut tidak berkembang lebih lanjut dan cenderung terhambat seiring waktu. Dalam kondisi ini, sebagian besar tulangan tetap berada dalam keadaan baik karena lingkungan belum cukup agresif untuk mendukung penyebaran korosi secara berkelanjutan. Sebaliknya, ketika nilai R_0 lebih besar dari 1, korosi dapat menyebar dan menetap pada permukaan tulangan. Pada kondisi ini, tidak seluruh bagian tulangan mengalami korosi, namun terdapat area tertentu yang terus berkarat dan tidak kembali pulih sepenuhnya. Hal ini menunjukkan bahwa korosi telah menjadi proses yang stabil dan berkelanjutan. Hasil perbandingan juga menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat interaksi antara bagian tulangan yang masih

sehat dengan bagian yang telah berkarat, semakin besar peluang korosi untuk menyebar. Setelah melewati suatu batas tertentu, peningkatan kecil pada tingkat interaksi atau kondisi lingkungan sudah cukup untuk menyebabkan korosi berkembang secara terus-menerus. Pada simulasi numerik menunjukkan bahwa korosi sangat dipengaruhi oleh nilai R_0 dan intensitas interaksi antarbagian tulangan. Ketika kedua faktor tersebut rendah, korosi cenderung terhambat dan tidak meluas. Sebaliknya, ketika nilainya tinggi, korosi dapat bertahan, menyebar, dan menjadi permasalahan jangka panjang.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ahmadi, W., & Widodo, W., 2020. *Local stability of malware propagation model on network computer with two time delay*. AIP Conference Proceedings, 2296, 020087. <https://doi.org/10.1063/5.0030321>
- [2] Ali, I., & Khan, S. U., 2022. *Threshold of stochastic SIRS epidemic model from infectious to susceptible class with saturated incidence rate using spectral method*. Symmetry, 14(9), 1838. <https://doi.org/10.3390/sym14091838>
- [3] Bulai, I. M., Sensi, M., & Sottile, S., 2023. *A geometric analysis of the SIRS compartmental model with fast information and misinformation spreading*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.06351>
- [4] Dordevic, M., & Dordevic, J., 2025. *SIRS model for computer viruses propagation with time dependent delay and jumps*. Filomat, 39(8), 2525–2556. <https://doi.org/10.2298/FIL2508525D>
- [5] Fedosov, S., Bulgakov, B., Ngo, H. X., Aleksandrova, O., & Solovev, V., 2022. *Theoretical and experimental models to evaluate the possibility of corrosion resistant concrete for coastal offshore structures*. Materials, 15(13), 4697. <https://doi.org/10.3390/ma15134697>
- [6] Fikri, D. (2024, September 17). *Korosi pada baja tulangan struktur beton*. PT Arcon Radian Abadi. <https://arcon.id/korosi-pada-baja-tulangan-struktur-beton/>
- [7] Goyal, A., Pouya, H. S., Ganjian, E., & Claisse, P., 2018. *A review of corrosion and protection of steel in concrete*. Arabian Journal for Science and Engineering, 43, 5035–5055. <https://doi.org/10.1007/s13369-018-3303-2>
- [8] Govindankutty, S., & Gopalan, S. P., 2024. *Epidemic modeling for misinformation spread in digital networks through a social intelligence approach*. Scientific Reports, 14, 69657. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-69657-0>
- [9] Kim, C., Choe, D.-E., Castro-Borges, P., & Castaneda, H., 2020. *Probabilistic corrosion initiation model for coastal concrete structures*. Corrosion and Materials Degradation, 1(3), 328–344. <https://doi.org/10.3390/cmd1030016>
- [10] Li, J., Chen, J., Wei, J., & Yang, X., 2022. *Temporal-spatial reliability analysis of RC bridges with corroded steel reinforcement bars*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 236(23), 11345–11357. <https://doi.org/10.1177/09544062221105985>
- [11] Liu, Y., & Zhou, Y., 2025. *Influence of bottom chloride-induced corrosion on truck collision response and damage of coastal reinforced concrete bridge piers*. Corrosion and Materials Degradation, 6(1), 11. <https://doi.org/10.3390/cmd6010011>
- [12] Madhusudan, V., Srinivas, M. N., & Nwokoye, U., 2022. *Bifurcation analysis of delayed computer virus model with Holling type III incidence function and treatment*. Applied Mathematics and Computation, 422, 126913. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.126913>
- [13] Raza, A., Fatima, U., Rafiq, M., Ahmed, N., Khan, I., Sooppy Nisar, K., & Iqbal, Z., 2021. *Mathematical analysis and design of the nonstandard computational method for an epidemic model of computer virus with delay effect*. Results in Physics, 21, 103750. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103750>

- [14] Rincon, L. F., Moscoso, Y. M., Hamami, A. E. A., Matos, J. C., & Bastidas-Arteaga, E., 2024. *Degradation models and maintenance strategies for reinforced concrete structures in coastal environments under climate change: A review*. Buildings, 14(3), 562. <https://doi.org/10.3390/buildings14030562>
- [15] Rodrigues, R., Gaboreau, S., Gance, J., Ignatiadis, I., & Betelu, S. (2021). *Reinforced concrete structures: A review of corrosion mechanisms and advances in electrical methods for corrosion monitoring*. Construction and Building Materials, 269, 121240. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.121240>
- [16] Shetty, S., Banerjee, S., Tallur, S., & Desai, Y. M., 2021. *Effectiveness of multi-physics numerical model in simulating accelerated corrosion with spatial and temporal non-uniformity*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2112.11683>
- [17] Sun, H., & others., 2021. *An uncertain SIR rumor spreading model driven by one Liu process*. Advances in Continuous and Discrete Models, 2021, 286. <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03386-w>
- [18] Upadhyay, R. K., & Singh, P., 2020. *Modeling and control of computer virus attack on a targeted network*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 538, 122617. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122617>