

# Generalization of Viviani's Theorem Using a Complex Number Approach on Regular Polygons Inscribed in the Unit Circle

## Generalisasi Teorema Viviani Berbasis Pendekatan Bilangan Kompleks Pada Poligon Beraturan Yang Terletak di Lingkaran Satuan

Zulfatra Lamuda<sup>1\*</sup>, Asriadi<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Program Studi Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Indonesia

Email: <sup>2</sup>zulfatralamuda@gmail.com, <sup>2</sup>asriadi@ung.ac.id

\* Corresponding Author

Received: 8 March 2026, revised: 4 May 2026, accepted: 6 May 2026

### Abstract

One of the classical theorems in geometry is Viviani's Theorem. This theorem states that for any interior point of an equilateral triangle, the sum of the perpendicular distances from that point to each triangle side equals the triangle's height. Therefore, this study aims generalize the property contained in Viviani's Theorem to regular polygons inscribed in the unit circle using a complex number approach. The results of this study show that the obtained constant is  $n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , where  $n \in \mathbb{N}$ . This constant replaces the height of the equilateral triangle as stated in Viviani's Theorem.

**Keywords:** Viviani's Theorem, Regular Polygon, Unit Circle, Complex Number.

### Abstrak

Salah satu teorema klasik dalam kajian geometri adalah Teorema Viviani. Teorema ini menyatakan jika terdapat suatu titik interior segitiga sama sisi maka jumlah jarak tegak lurus titik interior itu terhadap masing-masing sisi segitiga selalu sama dengan tinggi segitiga tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menggeneralisasi sifat yang terkandung dalam Teorema Viviani pada poligon beraturan yang terletak di lingkaran satuan berbasis pendekatan bilangan kompleks. Dari hasil penelitian diperoleh konstanta  $n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , dengan  $n \in \mathbb{N}$ . Konstanta tersebut menggantikan tinggi dari segitiga sama sisi sebagaimana bunyi Teorema Viviani.

**Kata kunci:** Teorema Viviani, Poligon Beraturan, Lingkaran Satuan, Bilangan Kompleks.

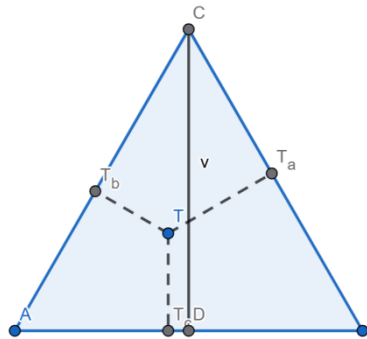
## 1. PENDAHULUAN

Geometri, sebagai cabang esensial matematika memberikan landasan teoritis bagi berbagai disiplin ilmu yang berkaitan dengan bentuk dan ukuran. Konsep paling mendasar dalam geometri adalah titik, yaitu objek tak berdimensi dan sering dijadikan acuan dalam pengukuran jarak.



Sementara itu, garis di definisikan sebagai himpunan titik-titik yang membentang tanpa ujung ke dua arah. Konsep titik dan garis ini yang menjadi fondasi dasar untuk memahami bentuk geometri lain, yakni bangun datar dan bangun ruang yang telah diperkenalkan sejak jenjang sekolah dasar [1].

Salah satu bentuk bangun datar yang memiliki sifat-sifat menarik untuk dikaji adalah segitiga. Objek ini di definisikan sebagai bangun datar yang dibentuk oleh tiga buah ruas garis yang saling berpotongan [2]. Dalam perkembangan ilmu geometri, segitiga telah banyak melahirkan berbagai konsep geometris, termasuk didalamnya adalah Teorema Viviani. Teorema Viviani dicetuskan oleh Vincenzo Viviani yang menyatakan bahwa jumlah jarak tegak lurus dari setiap titik interior ke sisi-sisi segitiga sama sisi sama dengan tinggi segitiga tersebut [3].



**Gambar 1.1** Ilustrasi Teorema Viviani

Keunikan sifat yang dimiliki Teorema Viviani telah mendorong beberapa peneliti mengembangkannya pada bentuk geometri beraturan. Penelitian [4] telah membuktikan teorema ini dengan menggunakan pendekatan vektor dan mengaitkannya dengan Teorema Minkowski serta poligon *equiangular*. Kemudian, Katsuura [5] dalam penelitiannya mengembangkannya pada bangun ruang tetrahedron *equifacial* dengan pendekatan geometri analitik. Penelitian terbaru oleh Drube dan Maxin [6] telah mensintesis berbagai penelitian sebelumnya serta memperkenalkan istilah Viviani *spread*, yaitu ukuran kuantitatif yang menggambarkan seberapa dekat suatu poligon cembung memiliki sifat Viviani konstan.

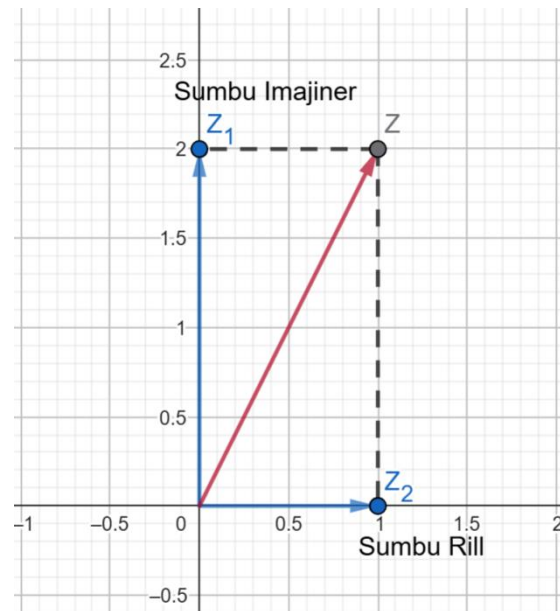
Dari sudut pandang yang berbeda pendekatan bilangan kompleks menawarkan cara yang lebih efektif, ringkas dan elegan dibanding geometri konvensional [13]. Hal ini di dukung oleh penelitian yang Tritianto dkk dan Laiya. Tritianto dkk [7] telah menerapkan bilangan kompleks dalam menyelesaikan berbagai permasalahan geometri bidang. Kemudian Laiya dkk [8] mereformulasi serta menggeneralisasi Teorema Van Aubel melalui pendekatan analitik kompleks. Hasil penelitian menghasilkan bahwa pendekatan ini mampu memberikan yang lebih ketat berkaitan dengan keortogonalitas, rotasi, dan simetri dalam geometri. Dari beberapa kajian literatur tersebut, maka penelitian ini bermaksud untuk menggeneralisasi Teorema Viviani melalui pendekatan bilangan kompleks pada poligon beraturan yang terletak di lingkaran satuan.

## 2. LANDASAN TEORI

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur dari berbagai sumber baik itu buku, artikel ilmiah, maupun sumber relevan lainnya. Berikut dituliskan teori-teori yang berkaitan dengan penelitian ini.

### 2.1. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks merupakan bentuk perumuman dari semua bilangan yang diketahui, seperti bilangan asli, bilangan riil, bilangan rasional, bilangan bulat. Secara umum, bilangan kompleks dituliskan sebagai  $Z = x + iy$ , dimana  $x, y \in \mathfrak{R}$  dan  $i = \sqrt{-1}$ .



Gambar 2.1 Bidang Kompleks

**Definisi 2.1** [9] Adapun operasi biner yang berlaku pada himpunan bilangan kompleks sebagai berikut. Misalkan  $z_1 = x_1 + iy_1$  dan  $z_2 = x_2 + iy_2$  berlaku

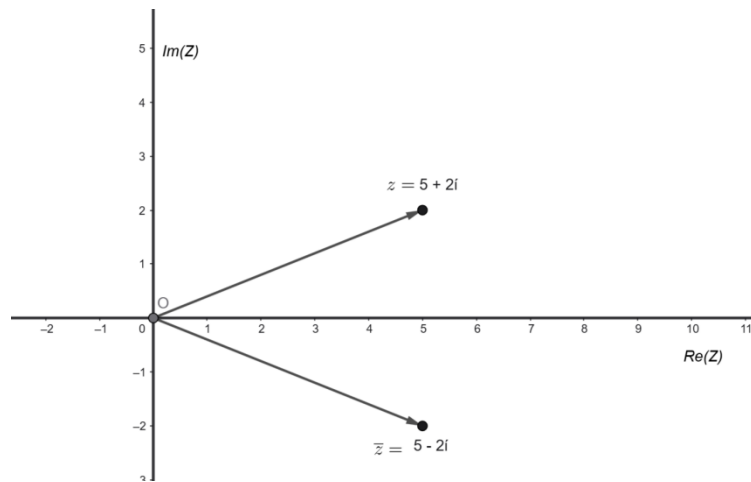
1. Penjumlahan :  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. Pengurangan :  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
3. Perkalian :  $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
4. Pembagian :  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} i, z_2 \neq 0$

Berikutnya, adalah definisi terkait modulus dan konjugat dari suatu bilangan kompleks.

**Definisi 2.2** [9] Modulus suatu bilangan kompleks  $z = x + iy$  ditulis  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Definisi 2.3** [9] Misalkan terdapat bilangan kompleks  $z = x + iy$ . Konjugat bilangan kompleks  $z$  didefinisikan sebagai  $\bar{z} = x - iy$ .

Secara geometris, kita dapat mengatakan bahwa konjugat sebagaimana pada Definisi 2.3 merupakan pencerminan atau refleksi suatu titik terhadap sumbu  $-x$ . Dalam bidang kompleks kita akan memaknai bahwasannya sumbu- $x = \text{Re}(z)$  dan sumbu- $y = \text{Im}(z)$ .



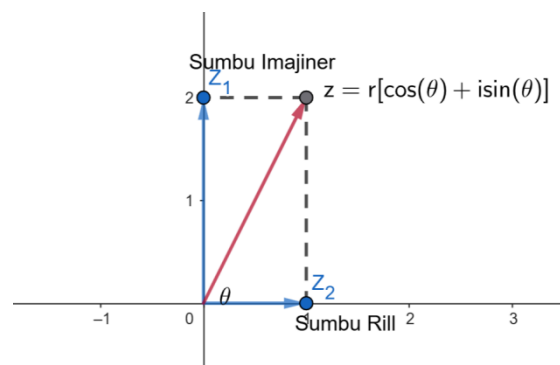
Gambar 2.2 Konjugat Bilangan Kompleks

Berikutnya disertakan sifat-sifat yang berkaitan dengan modulus dan konjugat dari bilangan kompleks:

**Teorema 2.4** [9] Jika  $z, w \in \mathbb{C}$  maka berlaku

1.  $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
2.  $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3.  $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$
4.  $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
5.  $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
6.  $\overline{\overline{z}} = z$
7.  $|z - w| = |w - z|$
8.  $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$
9.  $z - \overline{z} = 2i\text{Im}(z)$

Selain dituliskan  $z = x + iy$ , bilangan kompleks juga dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial, yaitu  $z = re^{i\theta}$ , dimana  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  disebut rumus Euler dengan  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ .

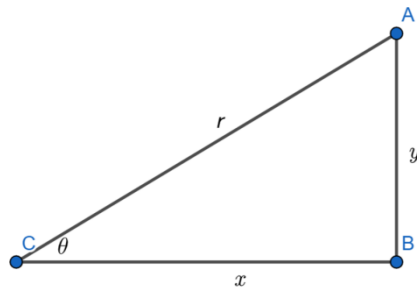


Gambar 2.3 Koordinat Polar Bilangan Kompleks

**Teorema 2.5** [9] Diberikan  $z, w \in \mathbb{C}$  dengan  $w = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ . Jika  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  dan  $z^n = w$  maka  $z_k = \sqrt[n]{r} [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$  dengan  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ .

## 2.2 Trigonometri

Trigonometri adalah disiplin ilmu dalam matematika yang fokus pada relasi antara besar sudut dan panjang sisi dalam segitiga, terutama segitiga siku-siku. Dalam trigonometri, terdapat tiga fungsi utama yang menggambarkan perbandingan rasio antara sisi-sisi segitiga berdasarkan salah satu sudutnya, yaitu  $\sin$ ,  $\cos$ , dan  $\tan$ . Perhatikan ilustrasi berikut.



$$\sin(\theta) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

**Gambar 2.4** Ilustrasi Konsep Trigonometri

Berikut sifat-sifat yang berkaitan dengan  $\sin$ ,  $\cos$ , dan  $\tan$ . [10].

1.  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ ,  $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$ ,  $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$
2.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
3.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
4.  $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$  dan  $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

Dari sifat 4 diperoleh  $\tan^2(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$ . Jika  $0 \leq \theta \leq \pi$  berlaku  $\tan(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$ .

## 2.3 Jarak Titik ke Garis Pada Bidang Kompleks

**Teorema 2.6** [11] Diberikan titik  $A, B$  pada bidang kompleks dengan  $A \neq B$ . Jika  $g$  adalah garis yang melalui titik  $A$  dan  $B$  maka garis  $g$  memenuhi himpunan

$$g: \{z \in \mathbb{C} : (A - B)\overline{(z - B)} - (A - B)\overline{(z - A)} = 0\}$$

**Teorema 2.7** [11] Diberikan titik  $W$  dan garis  $g: \{z \in \mathbb{C} : (A - B)\overline{(z - B)} - (A - B)\overline{(z - A)} = 0\}$  pada bidang kompleks. Jarak titik  $W$  ke garis  $g$  ditulis  $d(W, g)$  yaitu

$$d(W, g) = \left| \frac{(A - B)\overline{(B - W)} - (A - B)\overline{(B - A)}}{2(A - B)} \right|$$

## 2.4 Segitiga

**Definisi 2.8** [12] Misalkan  $P, Q$ , dan  $R$  adalah titik-titik berbeda. Himpunan

$$\Delta(P, Q, R) := (rg(P, Q) \cup rg(Q, R) \cup rg(P, R))$$

Disebut segitiga dengan titik sudut  $P, Q$  dan  $R$ . Notasi  $rg(P, Q)$  adalah ruas garis yang dalam hal ini sisi dari segitiga.

Dalam penelitian Lamuda dan Asriadi [11] telah mendefinisikan luas segitiga dalam bidang kompleks. Definisi tersebut sebagai berikut.

**Definisi 2.9** Diberikan titik buah  $A, B$  dan  $C$  pada bidang kompleks. Luas segitiga  $(A, B, C)$  dinyatakan sebagai

$$L(\triangle (A, B, C)) := \frac{1}{4} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \end{pmatrix} \right|$$

### 2.5 Poligon

Secara umum, poligon merupakan bangun datar yang memiliki banyak sisi atau bersisi -n. Setiap ruas garis tersebut disebut sisi poligon. Berdasarkan keteraturan panjang sisi dan besar sudutnya, poligon dibedakan menjadi dua jenis, yaitu poligon beraturan dan poligon tidak beraturan (Fauzi dkk., 2025).

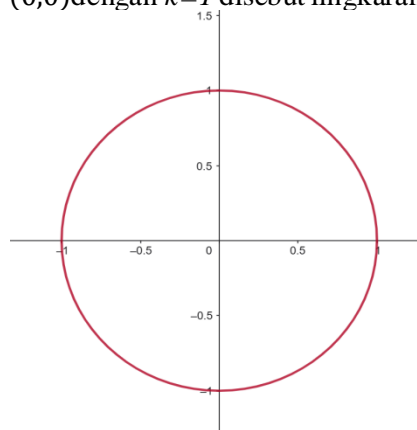
### 2.6 Lingkaran

**Definisi 2.10** [12] Diberikan konstanta  $p, q, k$  dimana  $k$  konstanta positif. Himpunan

$$L := \{(x, y) : (x - p)^2 + (y - q)^2 = k^2\}$$

Disebut sebagai lingkaran yang berpusat di titik  $(p, q)$  dan berjari-jari  $k$ .

Kasus khusus ketika  $(p, q) = (0, 0)$  dengan  $k=1$  disebut lingkaran satuan.



**Gambar 2.5** Lingkaran Satuan

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas formula generalisasi Teorema Viviani pada poligon beraturan yang terletak di lingkaran satuan dengan menggunakan pendekatan bilangan kompleks. Sebelum memasuki pembahasan utama, terlebih dahulu akan diuraikan beberapa definisi dan teorema pendukung.

### 3.1 Poligon di Bidang Kompleks

Pada bagian ini akan diperkenalkan konsep poligon dalam bidang kompleks sebagai landasan untuk pembahasan selanjutnya. Secara khusus, subbagian ini menguraikan definisi umum poligon, luas poligon, orientasi arah titik, sifat kekonveksan poligon, serta karakterisasi titik dalam suatu poligon. Seluruh konsep tersebut dianalisis menggunakan representasi titik sebagai bilangan kompleks sehingga memudahkan formulasi aljabar dan geometris yang diperlukan pada bagian berikutnya. Pemahaman terhadap materi ini sangat penting karena struktur poligon dan sifat-sifat

dasarnya menjadi fondasi utama dalam mengkaji generalisasi Teorema Viviani pada poligon beraturan yang terletak di lingkaran satuan.

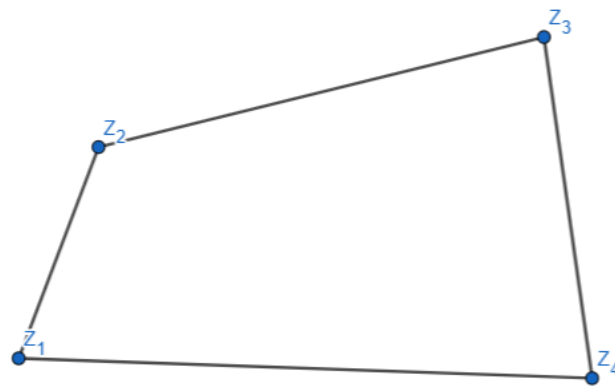
**Definisi 3.1** Misalkan  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  adalah  $n$  titik berbeda pada bidang kompleks dengan  $n \geq 3$ . Himpunan

$$\mathcal{P}_n = \bigcup_{k=1}^n rg(z_k, z_{k+1})$$

dengan  $z_{n+1} = z_1$  disebut sebuah poligon sederhana dengan  $n$  sisi jika untuk  $i \neq j$  berlaku  $(rg(z_i, z_{i+1}) \cap rg(z_j, z_{j+1})) \subseteq \{z_j, z_i\}$

Titik  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  disebut titik sudut poligon  $\mathcal{P}_n$ .

Perlu ditekankan bahwa penulisan notasi  $rg(a, b)$  adalah sebuah ruas garis yang menghubungkan titik  $a$  dan  $b$ .



**Gambar 3.1** Poligon  $\mathcal{P}_4$  di Bidang Kompleks

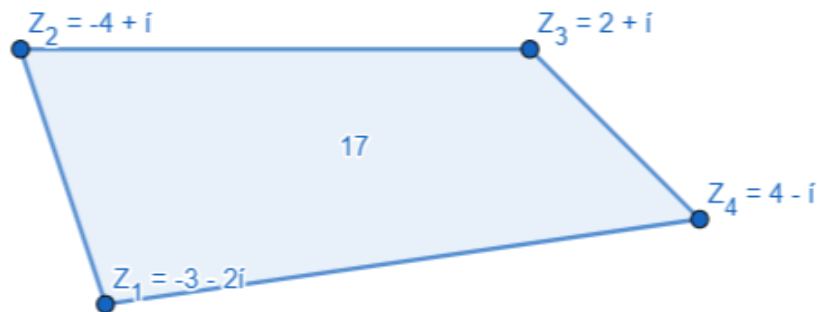
**Definisi 3.2** Luas dari sebuah poligon sederhana  $\mathcal{P}_n$  dengan titik sudut  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  dinyatakan sebagai

$$A(\mathcal{P}_n) = \frac{1}{4} \left| \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right|$$

**Contoh 3.1** Ambil titik  $z_1 = -3 - 2i$ ,  $z_2 = -4 + i$ ,  $z_3 = 2 + i$  dan  $z_4 = 4 - i$ .

$$\begin{aligned} A(\mathcal{P}_4) &= \frac{1}{4} \left| \sum_{k=1}^4 \det \begin{pmatrix} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_4 & z_1 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{4} |22i + 12i + 12i + 22i| \\ &= \frac{1}{4} |68i| \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{0^2 + 68^2} = \frac{1}{4} \cdot 68 = 17 \end{aligned}$$

Hasil perhitungan luas pada Contoh 4.1 juga divalidasi menggunakan perangkat lunak GeoGebra, dan diperoleh nilai yang sama sehingga memperkuat kebenaran hasil yang diperoleh secara analitis.

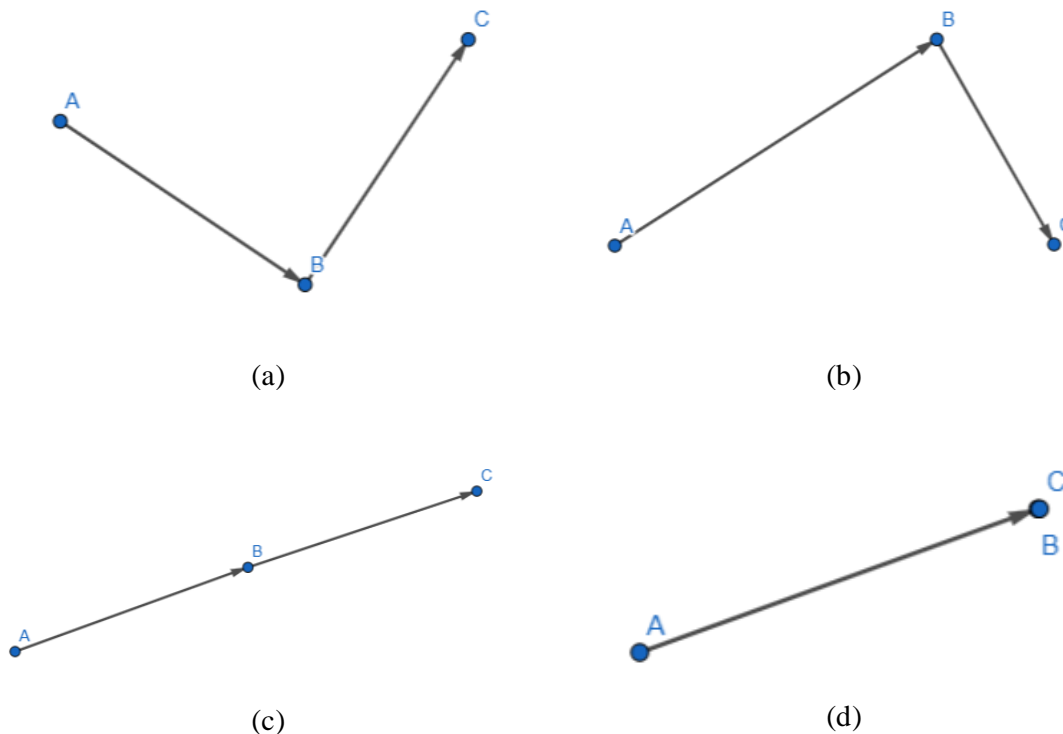


Gambar 3.2 Luas Poligon  $\mathcal{P}_4$  di Bidang Kompleks

**Definisi 3.3** Untuk tiga titik berbeda  $a, b, c$  orientasi  $a$  ke  $b$  ke  $c$  dituliskan sebagai

$$[a, b, c] = \text{Im}((a - b)(c - b))$$

- Jika  $[a, b, c] > 0$  maka orientasi  $a$  ke  $b$  ke  $c$  berlawanan arah jarum jam
- Jika  $[a, b, c] < 0$  maka orientasi  $a$  ke  $b$  ke  $c$  searah arah jarum jam
- Jika  $[a, b, c] = 0$  maka orientasi  $a$  ke  $b$  ke  $c$  tak berarah



Gambar 3.3 Orientasi Arah Titik A, B dan C

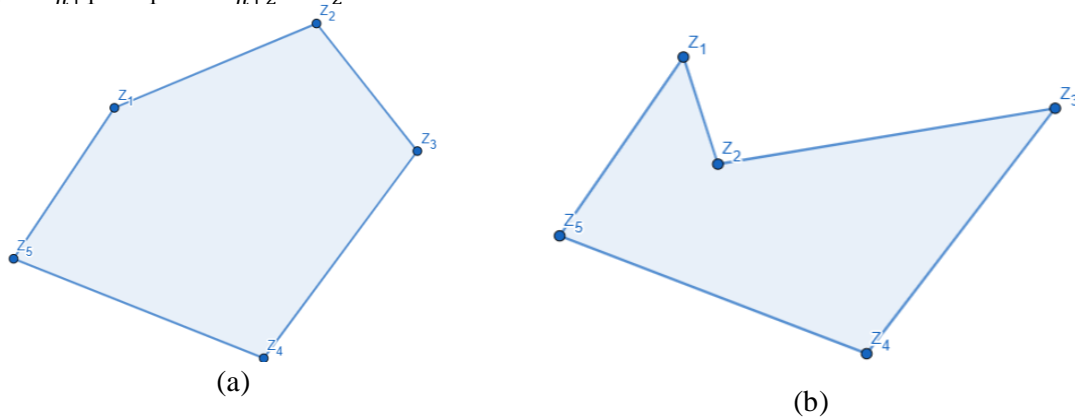
Gambar 3.3 menampilkan beberapa kemungkinan orientasi dari tiga titik A, B, dan C sebagaimana dijelaskan dalam Definisi 3.3 Pada Gambar 4.3(a), nilai  $[A, B, C] > 0$  menunjukkan bahwa urutan

titik  $A \rightarrow B \rightarrow C$  membentuk arah berlawanan dengan jarum jam. Sebaliknya, Gambar 4.3(b) menghasilkan  $[A, B, C] < 0$ , sehingga orientasi titik  $A \rightarrow B \rightarrow C$  berada dalam arah searah jarum jam. Kemudian, Gambar 4.3(c) dan 4.3(d) menggambarkan keadaan ketika  $[A, B, C] = 0$ , yang berarti ketiga titik tersebut berada pada satu garis lurus. Pada Gambar 4.5(c), titik C berada pada perpanjangan ruas garis A dan B, sedangkan pada Gambar 4.5(d), titik C berimpit dengan titik B pada ruas garis yang dibuat. Kedua kondisi ini menegaskan bahwa titik-titik tersebut tidak membentuk suatu belokan atau dengan kata lain tak berarah.

**Definisi 3.4** Sebuah poligon sederhana  $\mathcal{P}_n := \cup_{k=1}^n rg(z_k, z_{k+1})$  dikatakan konveks jika untuk setiap  $u, v \in \{1, 2, \dots, n\}$  berlaku

$$[z_u, z_v, z_{v+1}] \cdot [z_u, z_{v+1}, z_{v+2}] \geq 0$$

dengan  $z_{n+1} = z_1$  dan  $z_{n+2} = z_2$



**Gambar 3.4** Kekonveksan Poligon

Untuk kasus Gambar 4.4 (a) merupakan contoh poligon konveks dikarenakan setiap arah orientasi dari titik sudut poligon selalu  $[z_u, z_v, z_{v+1}] \cdot [z_u, z_{v+1}, z_{v+2}] \geq 0$ . Sementara pada Gambar 4.4 (b) merupakan contoh poligon non konveks karena terdapat arah orientasi titik sudut poligon yang menyebabkan  $[z_u, z_v, z_{v+1}] \cdot [z_u, z_{v+1}, z_{v+2}] \leq 0$ .

**Teorema 3.5** Jika poligon sederhana  $\mathcal{P}_n := \cup_{k=1}^n rg(z_k, z_{k+1})$  konveks maka untuk setiap  $u \in \{1, 2, \dots, n\}$  berlaku

$$\sum_{k=1}^n \text{Luas}(\Delta(z_u, z_k, z_{k+1})) = A(\mathcal{P}_n)$$

**Bukti.** Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_u & z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_u & \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right| &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| (z_{k+1} - z_u)(z_k - z_{k+1}) - (z_{k+1} - z_u)(\overline{z_k - z_{k+1}}) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| 2i \cdot \text{Im}(\overline{(z_{k+1} - z_u)}(z_k - z_{k+1})) \right| \end{aligned}$$

Kemudian, menurut Definisi 3.3 diperoleh

$$= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \text{Im}(\overline{(z_{k+1} - z_u)}(z_k - z_{k+1})) \right|$$

$$= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(-|z_{k+1}|^2 + z_k \bar{z}_{k+1} + \bar{z}_u z_k - \bar{z}_u z_{k+1}) \right|$$

Karena diketahui  $\operatorname{Im}(|z_{k+1}|^2) = 0$ , persamaan terakhir menjadi

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k \bar{z}_{k+1} + \bar{z}_u z_k - \bar{z}_u z_{k+1}) \right| \\ &= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k \bar{z}_{k+1}) + \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(\bar{z}_u (z_k - z_{k+1})) \right| \end{aligned}$$

Menurut Definisi 3.1 berlaku  $\sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k - z_{k+1}) = 0$  sehingga  $\sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(\bar{z}_u (z_k - z_{k+1})) = 0$  persamaan terakhir jika dilanjutkan menjadi

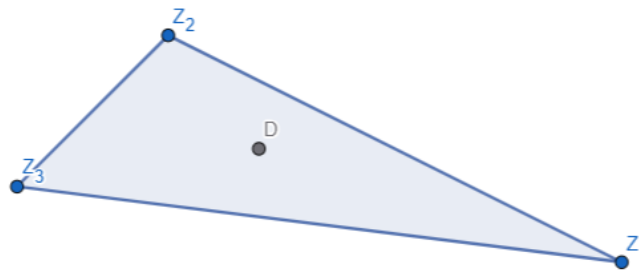
$$\begin{aligned} &= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k \bar{z}_{k+1}) \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right| = A(\mathcal{P}_n) \end{aligned}$$

Terbukti. ■

**Definisi 3.6** Titik  $D$  disebut titik dalam poligon konveks apabila untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  terdapat  $\alpha_i \in [0, 1]$  dengan  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$  sedemikian sehingga

$$D = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot z_k$$

**Contoh 3.2** Misalkan titik  $z_1 = 4 + i, z_2 = -2 + 4i, z_3 = -4 + 2i$ . Kemudian, dibentuk poligon  $\mathcal{P}_3$  dengan titik sudut  $z_1, z_2$ , dan  $z_3$ . Terdapat titik dalam  $D = \frac{-4}{5} + \frac{5}{2}i$  dengan  $\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.4, \alpha_3 = 0.3$



**Gambar 3.5** Titik Dalam Poligon  $\mathcal{P}_3$

**Teorema 3.7** Diberikan poligon  $\mathcal{P}_n$  dengan titik sudut  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ . Jika titik  $D$  adalah titik dalam dari  $\mathcal{P}_n$  maka

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Luas}(\Delta(D, z_k, z_{k+1})) = A(\mathcal{P}_n)$$

**Bukti.** Perhatikan bahwa, menurut Definisi 3.6 diperoleh

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ D & z_k & z_{k+1} \\ \bar{D} & \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| \det \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^n \alpha_m & 1 & 1 \\ \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot z_m & z_k & z_{k+1} \\ \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \bar{z}_m & \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right|$$

Selanjutnya dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) determinan matriks diperoleh

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_m & z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_m & \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot [(\overline{z_{k+1} - z_m})(z_k - z_{k+1}) - (z_{k+1} - z_m)(\overline{z_k - z_{k+1}})] \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left| \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot 2i \operatorname{Im}[(\overline{z_{k+1} - z_m})(z_k - z_{k+1})] \right| \end{aligned}$$

Kemudian, menurut Definisi 3.3 diperoleh

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \operatorname{Im}[(\overline{z_{k+1} - z_m})(z_k - z_{k+1})] \right| \\ &= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \operatorname{Im}[-|z_{k+1}|^2 + z_k \bar{z}_{k+1} + \bar{z}_m z_k - \bar{z}_m z_{k+1}] \right| \end{aligned}$$

Karena  $\operatorname{Im}(|z_{k+1}|^2) = 0$ , persamaan terakhir menjadi

$$= \left| \frac{2i}{4} \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k \bar{z}_{k+1}) + \frac{2i}{4} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_m \operatorname{Im}(\bar{z}_m (z_k - z_{k+1})) \right|$$

Karena  $\sum_{m=1}^n \alpha_m = 1$  dan cara yang serupa dengan Teorema 3.5 maka diperoleh

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{2i}{4} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k \bar{z}_{k+1}) \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right| = A(\mathcal{P}_n) \end{aligned}$$

Terbukti. ■

### 3.2 Representasi Poligon Beraturan Pada Lingkaran Satuan di Bidang Kompleks

Pada bagian ini akan dibahas representasi poligon beraturan pada lingkaran satuan dengan menggunakan pendekatan bilangan kompleks. Pembahasan ini bertujuan untuk menunjukkan bagaimana titik-titik sudut poligon beraturan dapat dinyatakan sebagai akar-akar dari suatu polinom kompleks, sehingga struktur geometris poligon tersebut dapat dianalisis secara lebih sistematis. Beberapa definisi dan teorema pendukung akan diuraikan untuk membangun dasar yang diperlukan sebelum memasuki pembuktian teorema utama terkait generalisasi Teorema Viviani.

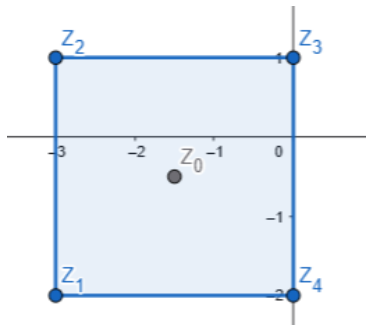
**Definisi 3.8** Sebuah Poligon dengan titik sudut  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  disebut beraturan jika untuk  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  dan  $z_0 = \frac{\sum_{k=1}^n z_k}{n}$  berlaku

$$|z_{k+1} - z_k| = |z_1 - z_2| \wedge |z_0 - z_k| = |z_1 - z_0|$$

$z_0$  merupakan titik pusat poligon beraturan yang diperoleh dengan merata-ratakan titik sudutnya.

**Contoh 3.3** Sebuah poligon  $\mathcal{P}_4$  seperti pada gambar dibawah ini. Titik sudut poligon ini berturut-turut adalah  $z_1 = -3 - 2i, z_2 = -3 + i, z_3 = i, z_4 = -2i$  sedemikian sehingga

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} = -1.5 - 0.5i$$



**Gambar 3.6** Poligon Beraturan

**Teorema 3.9** Jika  $c$  adalah salah satu akar kompleks dari persamaan  $z^n = 1$ . Jika  $c \neq 1$  maka  $1 + c + c^2 + c^3 + \dots + c^{n-1} = 0$ .

**Bukti.** Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} c^n &= 1 \\ \Rightarrow c^n - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (c - 1)(1 + c + c^2 + c^3 + \dots + c^{n-1}) &= 0 \\ \Rightarrow 1 + c + c^2 + c^3 + \dots + c^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa untuk  $c \neq 1$  maka  $1 + c + c^2 + c^3 + \dots + c^{n-1} = 0$ . ■

**Teorema 3.10** Diberikan polinom  $Q_n = z^n - 1$ . Jika  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  adalah akar-akar kompleks berbeda dari  $Q_n = 0$ , maka akar-akar tersebut merupakan titik sudut poligon beraturan yang terletak di lingkaran satuan.

**Bukti.** Misalkan  $z_k$  adalah akar-akar dari polinom  $Q_n = z^n - 1$  dimana  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh bahwa  $z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ .

Pertama akan ditunjukkan  $|z_{k+1} - z_k| = |z_1 - z_2|$ .

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - z_k| &= \left| \cos\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) - \left[ \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right] \right| \\ &= \sqrt{\left( \cos\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right)^2 + \left( \sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2 - 2 \left[ \cos \left( \frac{2\pi(k+1)}{n} \right) \cdot \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right) + \sin \left( \frac{2\pi(k+1)}{n} \right) \cdot \sin \left( \frac{2\pi k}{n} \right) \right]} \\
&= \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right)} \\
&= \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{4\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} \right)} \\
&= \sqrt{2 - 2 \left[ \cos \left( \frac{4\pi}{n} \right) \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + \sin \left( \frac{4\pi}{n} \right) \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right]} \\
&= \sqrt{2 - 2 \left[ \left( \cos \left( \frac{4\pi}{n} \right) - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 + \left( \sin \left( \frac{4\pi}{n} \right) - \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 \right]} \\
&= \left| \cos \left( \frac{4\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{4\pi}{n} \right) - \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right] \right| \\
&= |z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

Kedua, akan ditunjukkan bahwa  $z_0 = \frac{\sum_{k=1}^n z_k}{n} = 0 + 0i$ . Dari persamaan  $z_k = \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi k}{n} \right)$  dengan  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  diperoleh

- $z_1 = \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right)$

Berdasarkan Teorema Dalil De' Moivre untuk titik selanjutnya dapat dituliskan

- $z_2 = \cos \left( \frac{4\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{4\pi}{n} \right) = \left( \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^2$

- $z_3 = \cos \left( \frac{6\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{6\pi}{n} \right) = \left( \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^3$

Di lanjutkan terus sampai ke  $k = n$

- $z_n = \cos \left( \frac{2n\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2n\pi}{n} \right) = \left( \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^n$

Sehingga diperoleh  $z_0 = \frac{\sum_{k=1}^n z_k}{n} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n}{n} = \frac{z_1(1 + z_1^2 + z_1^4 + \dots + z_1^{n-1})}{n}$  karena  $z_1 \neq 1$  untuk

setiap  $n \geq 3$  maka menurut Teorema 3.9 berlaku  $z_0 = \frac{\sum_{k=1}^n z_k}{n} = 0 + 0i$

Ketiga, akan ditunjukkan  $|z_0 - z_k| = |z_1 - z_0| = 1$

$$\begin{aligned}
|z_0 - z_k| &= \left| \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi k}{n} \right) \right| \\
&= \sqrt{\left( \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right) \right)^2 + \left( \sin \left( \frac{2\pi k}{n} \right) \right)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_0| &= \left| \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right| \\
&= \sqrt{\left( \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 + \left( \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^2}
\end{aligned}$$

$$= 1$$

Dengan demikian, terbukti bahwa  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  adalah titik-titik yang terletak di lingkaran satuan sekaligus titik sudut poligon beraturan. ■

**Teorema 3.11** Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ , jika  $z_k$  salah satu akar polinom  $Q_n = z^n - 1$  dengan  $n \in \mathbb{N}$  maka  $z_k$  memiliki konjugat kompleks, yakni  $\overline{z_{n-k}}$ .

**Bukti.** Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} z_{n-k} &= \cos\left(\frac{2\pi(n-k)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi(n-k)}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= \overline{z_k} \end{aligned}$$

Terbukti. ■

**Teorema 3.12** Luas poligon beraturan yang titik-titik sudutnya terletak di lingkaran satuan adalah

$$A_n(\mathcal{P}_n) = \frac{n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$$

**Bukti.** Terlebih dahulu akan ditunjukkan

$$|z_1 - z_2|^2 = \tan \frac{\pi}{n} \left| e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} - 1 \right|$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= \left( \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)^2 + \left( \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)^2 \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \frac{2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Dari sifat-sifat persamaan trigonometri persamaan terakhir menjadi

$$\begin{aligned} &= 2 \tan \frac{\pi}{n} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \tan \frac{\pi}{n} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \tan \frac{\pi}{n} \sqrt{4 \sin^2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \tan \frac{\pi}{n} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right)} \\ &= \tan \frac{\pi}{n} \sqrt{2\left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{(n-2)\pi}{n}\right)\right)} \\ &= \tan \frac{\pi}{n} \sqrt{\left(\cos\left(2 \cdot \frac{(n-2)\pi}{n}\right) - 1\right)^2 + \cos\left(2 \cdot \frac{(n-2)\pi}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \tan \frac{\pi}{n} \left| e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} - 1 \right|$$

Selanjutnya dari Definisi 3.2 dan Teorema 3.11 diperoleh

$$\begin{aligned} A_n(\mathcal{P}_n) &= \frac{1}{4} \left| \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| (n-1)e^{-\frac{2\pi i}{n}} - (n-1)e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - e^{-\frac{2\pi i(n-1)}{n}} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| (n-1)\bar{z}_1 - (n-1)z_1 + z_{n-1} - \bar{z}_{n-1} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| (n-1)z_{n-1} - (n-1)z_1 + z_{n-1} - z_1 \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| z_{n-1} - z_1 \right| \\ &= \frac{n}{4} \left| e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - e^{\frac{2\pi i}{n}} \right| \\ &= \frac{n}{4} \left| e^{\frac{2\pi i}{n}} \right| \cdot \left| e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} - 1 \right| \\ &= \frac{n}{4} \left| e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} - 1 \right| \\ &= \frac{n}{4} \cdot \frac{|z_1 - z_2|^2}{\tan \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{n}{4} \cdot \frac{\left( \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)^2 + \left( \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)^2}{\tan \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{n}{4} \cdot \frac{4\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\tan \frac{\pi}{n}} \\ &= n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &= \frac{n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} \end{aligned}$$

Dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa luas poligon beraturan yang terletak di lingkaran satuan adalah

$$A_n(\mathcal{P}_n) = \frac{n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$$

### 3.3 Generalisasi Teorema Viviani Pada Poligon Beraturan yang Terletak di Lingkaran Satuan

Setelah memahami konsep jarak titik ke garis serta struktur poligon dalam pendekatan bilangan kompleks, pada bagian berikut akan dibahas generalisasi Teorema Viviani pada poligon beraturan yang terletak pada lingkaran satuan sebagai tujuan utama dari penelitian ini.

**Teorema 3.13** Diberikan titik-titik sudut poligon  $\mathcal{P}_n$  yaitu  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  yang merupakan akar-akar dari polinom  $Q_n = z^n - 1$  serta garis  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  pada bidang kompleks. Jika

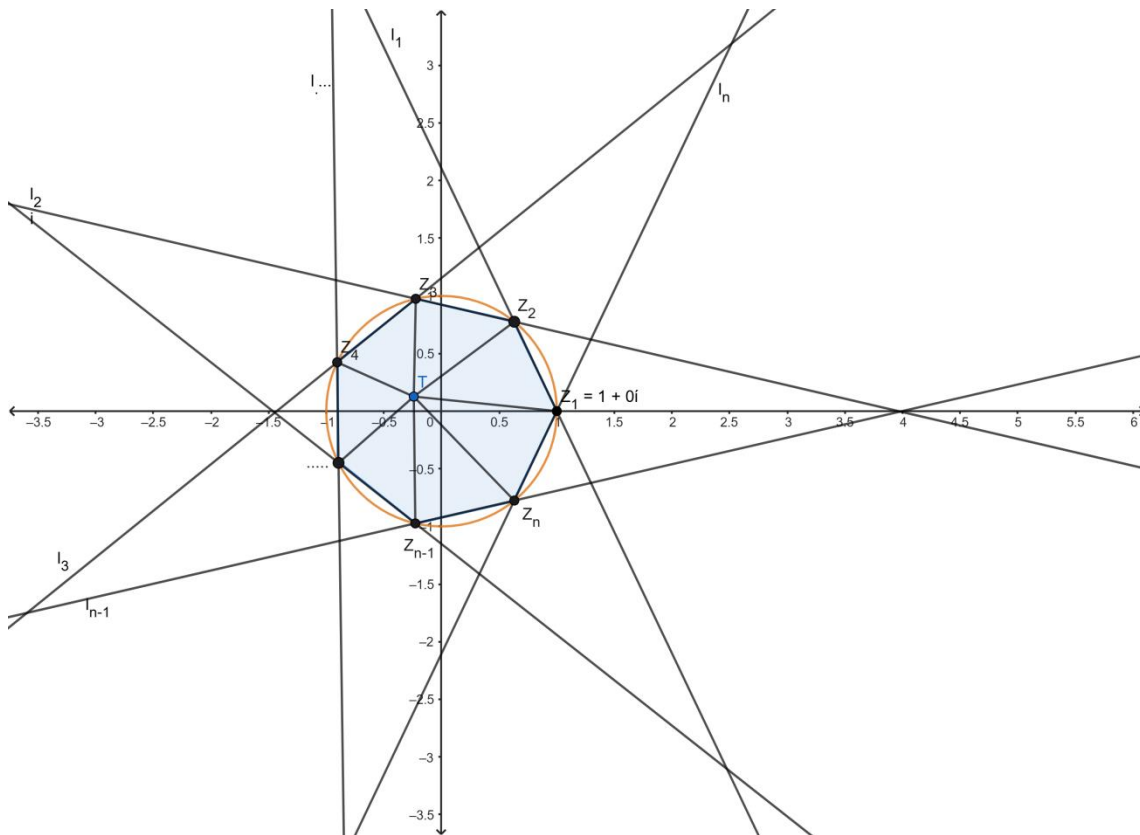
1. Titik  $T$  merupakan titik dalam poligon  $\mathcal{P}_n$ ,

2.  $z_k, z_{k+1} \in l_m$ , dengan  $m \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Maka

$$\sum_{i=1}^n d(T, l_i) = n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

**Bukti.**



**Gambar 3.7** Generalisasi Teorema Viviani pada poligon beraturan yang berada di lingkaran satuan pada bidang kompleks

Pandang  $\Delta(z_1, z_2, T)$ ,  $\Delta(z_2, z_3, T)$ ,  $\Delta(z_3, z_4, T)$ , ...,  $\Delta(z_n, z_1, T)$  seperti tampak pada gambar. Misalkan tinggi dari masing-masing segitiga tersebut  $d(T, l_1), d(T, l_2), d(T, l_3), \dots, d(T, l_n)$ . Oleh karena titik sudut poligon  $\mathcal{P}_n$  akar-akar dari polinom  $Q_n = z^n - 1$ , berdasarkan Definisi 3.6, Teorema 3.10, dan Teorema 3.12 diperoleh

$$\text{Luas } \Delta(z_1, z_2, T) + \text{Luas } \Delta(z_2, z_3, T) + \text{Luas } \Delta(z_3, z_4, T) + \dots + \text{Luas } \Delta(z_n, z_1, T) = A_n(\mathcal{P}_n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |z_1 - z_2| [d(T, l_1), d(T, l_2), d(T, l_3), \dots, d(T, l_n)] = \frac{n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) [d(T, l_1), d(T, l_2), d(T, l_3), \dots, d(T, l_n)] = \frac{2n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow [d(T, l_1), d(T, l_2), d(T, l_3), \dots, d(T, l_n)] = n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n d(T, l_i) = n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Terbukti. ■

#### 4.KESIMPULAN

Hasil akhir yang diperoleh menunjukkan bahwa untuk setiap titik interior T pada poligon beraturan  $\mathcal{P}_n$ , yang titik sudutnya merupakan akar-akar dari persamaan  $z^n = 1$ , jumlah jarak tegak lurus dari titik tersebut ke masing-masing sisi poligon memiliki nilai konstan, yaitu

$$\sum_{i=1}^n d(T, l_i) = n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Konstanta ini berperan sebagai generalisasi dari tinggi segitiga sama sisi pada Teorema Viviani klasik. Dengan demikian, pembuktian ini berhasil menunjukkan bahwa sifat fundamental Teorema Viviani dapat diperluas secara elegan ke poligon beraturan berorde berapa pun melalui pendekatan bilangan kompleks.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Barus, B. A. D., Auliya, N. P., Putri, M., Nadeak, C. A., Mailani, E. & Ketaren, A. M., 2024. Mengajarkan Konsep Dasar Geometri di SD: Langkah Awal Menuju Pemahaman Matematika. *Journal of Education and Learning Evaluation*, Vol. 1, No. 2, 764–769.
- [2] Hidayantin, N., 2021. Generalisasi Ketaksamaan Cosinus Pada Sebarang Segitiga. *Transformasi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, Vol. 5, No. 2, 579–588.
- [3] Kolar-Begović, Z. & Ždralović, V., 2019. Vivianijev Teorem. *Osječki Matematički List*, Vol. 19, No. 1, 31–41
- [4] Alhajjar, E. & Nasta, M., 2022. Viviani's Theorem, Minkowski's Theorem and Equiangular Polygons. *BSU Undergraduate Mathematics Exchange*, Vol. 16, No. 1, 66–72.
- [5] Katsuura, H., 2019. Three-Dimensional Viviani Theorem on a Tetrahedron. *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 23, No. 2, 179–182.
- [6] Drube, P. & Maxin, D., 2025. Generalizations of Viviani's Theorem and the Viviani Spread of Convex Polygon. *International Journal of Geometry*, Vol. 14, No. 3, 41–56.
- [7] Tritianto, D., Linawati, L. & Susanto, B., 2018. Penerapan Bilangan Kompleks untuk Menyelesaikan Soal-Soal Geometri Datar. *Jurnal Matematika dan Aplikasi deCartesiaN*, Vol. 7, No. 1, 8–14.
- [8] Laiya, G. H. F., Asriadi, Novianita, A. & Ismail, S., 2025. Reformulation and Generalization of Van Aubel's Theorem Using Complex Number. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, Vol. 8, No. 2, 408–418.

- [9] Purwosetiyono, D. F. X., 2022. *Pengantar Analisis Kompleks*. UPT Penerbitan Universitas PGRI Semarang Press, Semarang.
- [10] Irmayanti, Henra, K., Asnita, U. A., Munaji, Riaddin, D., Fitriani, Junaedi, Resi, B. B. F., Setiawan, J. & Dahlan, T., 2021. *Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar*. Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.
- [11] Lamuda, Z. & Ariadi, 2025. Pembuktian Teorema Thales dengan Menggunakan Bilangan Kompleks. *MATHunessa (Jurnal Ilmiah Matematika)*, Vol. 13, No. 2, 535–538.
- [12] Asriadi, 2024. *Geometri Analitik: Sebuah Pendekatan Aljabar Untuk Memahami Geometri*. Komojoyo Press, Yogyakarta.
- [13] Sagindykov, Zh. & Bimuratzhanar, Zh., 2024. Application of Complex Number Algebra in Plane Geometry. *Bulletin of Kazakh National Women's Teacher Training University*, Vol. 97, No. 1, 60–74.