

Edge Metric Dimension of Uniform Theta Graphs and Sunflower Graphs

Dimensi Metrik Sisi pada Graf Theta Seragam dan Graf Bunga Matahari

Muchammad Abrori¹, Deddy Rahmadi^{2*}, Lailatul Ulla Safitri³, Alvian Nur Rohman⁴,
Jaqueline Widad Zuha⁵

^{1,2,3,4,5} Program Studi Matematika, UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta, Indonesia

Email: ¹muchammad.abrori@uin-suka.ac.id, ²deddy.rahmadi@uin-suka.ac.id, ³21106010001@student.uin-suka.ac.id, ⁴20106010036@student.uin-suka.ac.id, ⁵22106010057@student.uin-suka.ac.id

*Corresponding Author

Received: 23 April 2026, revised: 27 July 2026, accepted: 3 August 2026

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. In graph theory, an edge resolving set is defined as a subset of vertices $W_e \subseteq V(G)$ such that every edge in G has a distinct distance representation with respect to W_e . The minimum cardinality of an edge resolving set is called the edge metric dimension of G , denoted by $edim(G)$. This study aimed to determine the edge metric dimension of the uniform theta graph $\theta(n, m)$ and the sunflower graph SF_n . The method employed a graph-structure approach and distance analysis between edges and vertices supported by a literature review. The results showed that $edim(\theta(n, m)) = 3$ for $n = 3$ and 4, $edim(\theta(n, m)) = 4$ for $n = 5$, and $edim(\theta(n, m)) = 5$ for $n = 6$. Furthermore, $edim(SF_n) = 4$ for $n = 4$ and 6, $edim(SF_n) = 5$ for $n = 3, 5$, and 7, $edim(SF_n) = 6$ for $n = 8$, and $edim(SF_n) = n - 3$ for $n \geq 9$.

Keywords: edge metric dimension, edge resolving set, uniform theta graph, sunflower graph

Abstrak

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ Adalah sebuah graf dengan himpunan titik (verteks) $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Dalam konteks teori graf, himpunan penbeda sisi didefinisikan sebagai himpunan bagian titik $W_e \subseteq V(G)$ sedemikian sehingga setiap sisi pada graf G memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W_e . Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda sisi disebut sebagai dimensi metrik sisi dari graf G , yang dinotasikan $edim(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi metrik sisi dari graf theta seragam $\theta(n, m)$ dan graf bunga matahari SF_n . Metode yang ditentukan Adalah pendekatan struktur graf dan analisis jarak antara sisi dan vertex, yang didukung oleh studi literatur. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $edim(\theta(n, m)) =$



JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

3 for $n = 3$ and 4, $\text{edim}(\theta(n, m)) = 4$ for $n = 5$, and $\text{edim}(\theta(n, m)) = 5$ for $n = 6$. Furthermore, $\text{edim}(SF_n) = 4$ for $n = 4$ and 6, $\text{edim}(SF_n) = 5$ for $n = 3, 5$, and 7, $\text{edim}(SF_n) = 6$ for $n = 8$, and $\text{edim}(SF_n) = n - 3$ for $n \geq 9$.

Kata kunci: dimensi metrik sisi, himpunan pembeda sisi, graf theta seragam ,graf bunga matahari

1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Teori graf diperkenalkan oleh seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Leonhard Euler pada abad ke-18 untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg yang dikenal dengan Seven Bridges of Königsberg. Tahun 1847, G.R. Kirchhoff (1824 – 1887) berhasil mengembangkan teori pohon Theory of Trees yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Coyley (1821 – 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon. Pada era Kirchhoff dan Cayley, berkembang secara signifikan dalam teori graf. Salah satunya adalah konjektur empat warna, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah peta, hanya diperlukan empat warna sehingga setiap wilayah yang berbatasan tidak memiliki warna yang sama [5]. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang mempelajari struktur yang menggambarkan hubungan antar objek melalui titik (verteks) dan sisi (edge). Sebuah graf G dapat dinyatakan sebagai pasangan $G = (V(G), E(G))$, di mana $V(G)$ adalah himpunan titik (verteks) dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan dua titik dalam $V(G)$. Graf sering digunakan dalam merepresentasikan objek diskrit serta hubungan antar objek tersebut.

Dimensi metrik graf pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975, dan selanjutnya dikaji oleh F. Harary dan R. A. Melter pada tahun 1976 [12]. Setelah itu, seiring dengan perkembangannya yang cukup pesat [23], banyak penelitian yang mengkaji tentang dimensi metrik seperti Dimensi Metrik Amalgamasi Graf Theta [25], *Edge Metric Dimension on Some Families of Tree* [3], *Uniquely Identifying the Edges of a Graph: The Edge Metric Dimension* [10], *Metric and Edge-Metric Dimensions of Bobble-Neighbourhood-Corona Graphs* [21]. Terdapat beberapa istilah dalam dimensi metrik, salah satunya adalah himpunan pembeda. Himpunan pembeda (*resolving set*) merupakan himpunan titik pada graf, untuk setiap titik pada graf tersebut mempunyai representasi jarak yang berbeda.

Menurut Chartrand et al.[7], Misalkan G adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi (edge) $E(G)$. Himpunan berurutan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ adalah himpunan bagian dari $V(G)$ dan v adalah titik di G . Representasi dari v terhadap W yaitu $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_n))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda dari G jika untuk setiap dua titik berbeda u dan v di $V(G)$, berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$. Himpunan pembeda W dengan banyaknya elemen minimum dari G . Kardinalitas dari himpunan pembeda di G disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $\text{dim}(G)$.

Berdasarkan konsep dimensi metrik pada titik yang telah dijelaskan sebelumnya, kajian ini selanjutnya diarahkan pada pengembangan konsep serupa pada sisi graf. Pendekatan ini menghasilkan definisi dimensi metrik sisi, yang mengukur kemampuan suatu himpunan sisi dalam membedakan seluruh sisi pada graf. Menurut Kelenc et al. [10], diberikan G merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Misalkan himpunan berurutan $W_e = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq V(G)$, diperoleh representasi sisi e terhadap W_e adalah $r(v|W_e) = (d_E(e, w_1), d_E(e, w_2), \dots, d_E(e, w_n))$. Lebih lanjut, W_e merupakan

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

himpunan pembeda sisi dari G jika setiap dua sisi yang berbeda $e, f \in E(G)$, berlaku $r(e | W_e) \neq r(f | W_e)$. Kardinalitas himpunan pembeda sisi di G disebut dimensi metrik sisi pada G , dinotasikan dengan $edim(G)$. Salah satu karakteristik dimensi metrik sisi adalah sebagai berikut.

Teorema 1.1 *Diberikan graf terhubung G dengan n titik, maka $edim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$.*

Penelitian mengenai dimensi metrik sisi telah banyak dikembangkan pada berbagai kelas graf, baik dalam bentuk penentuan nilai eksak maupun karakterisasi sifat-sifatnya. Beberapa studi telah mengkaji dimensi metrik sisi pada graf pohon, graf siklus, serta beberapa kelas graf khusus lainnya. Namun demikian, kajian terhadap dimensi metrik sisi pada graf hasil operasi tertentu maupun struktur graf yang lebih kompleks masih relatif terbatas.

Sejumlah penelitian terkini menunjukkan perkembangan yang signifikan pada berbagai kelas graf yang lebih spesifik. Mhagama et al. [14] mengkaji dimensi metrik sisi pada beberapa kelas graf kaktus, sedangkan Knor et al. [11] meneliti hubungan antara dimensi metrik dan dimensi metrik sisi pada graf secara umum. Kajian juga diperluas pada graf yang merepresentasikan struktur kimia, seperti yang dilakukan oleh Abbas et al. [2] pada boron nitride heksagonal dan karbon nanotube, serta oleh Wei et al. [24] pada graf yang berasal dari polytopes konveks.

Selain itu, Chandran dan Reji [6] meneliti dimensi metrik sisi pada hasil operasi produk Kartesius, sementara Mn et al. [15] mengkaji comb product pada siklus terhadap graf bintang dan kipas. Studi lebih lanjut terkait operasi graf juga dilakukan oleh Peterin dan Yero [16], yang membahas dimensi metrik sisi pada berbagai operasi graf. Di sisi lain, Mhagama et al. [13] mengembangkan kajian pada line graph dari graf molekul, khususnya yang berkaitan dengan struktur obat antivirus.

Pengembangan juga mencakup kelas graf khusus lainnya, seperti graf circulant oleh Ahsan et al. [4]. Dalam konteks jaringan, Abbas et al. [1] meneliti dimensi metrik sisi pada jaringan *honeycomb* dan heksagonal yang relevan untuk Internet of Things (IoT), sedangkan Sharma et al. [22] serta Farooq et al. [8] mengkaji jaringan kimia lainnya seperti *carbon nanotube* dan berbagai jaringan molekul.

Lebih lanjut, Prabhu dan Janany [17] meneliti dimensi metrik sisi pada jaringan silikat, sementara Filipović et al. [9] mengkaji pada generalized Petersen graphs. Pada perkembangan terbaru, Rahmadi et al. [19] telah mengkaji dimensi metrik sisi pada graf *helm* dan *closed helm*, yang menunjukkan bahwa struktur graf yang lebih kompleks memberikan tantangan tersendiri dalam menentukan himpunan pembeda sisi.

Selain itu, perkembangan terbaru dalam teori graf menunjukkan bahwa transformasi graf, seperti graf turunan atau graf hasil konstruksi tertentu, memberikan tantangan baru dalam menentukan dimensi metrik sisi. Kompleksitas struktur yang meningkat sering kali menyebabkan metode klasik tidak dapat diterapkan secara langsung, sehingga diperlukan pendekatan baru untuk menganalisisnya.

Dalam konteks ini, penelitian ini berfokus pada kajian dimensi metrik sisi pada graf theta dan graf bunga matahari. Pemilihan objek ini didasarkan pada sifat strukturnya yang unik serta potensinya dalam memperluas hasil-hasil sebelumnya pada dimensi metrik sisi. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan nilai dimensi metrik sisi serta mengkaji karakteristik himpunan pembeda sisi pada kelas graf tersebut. Diharapkan hasil penelitian ini dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan teori dimensi metrik, khususnya pada kajian dimensi metrik sisi, serta membuka peluang penelitian lanjutan pada struktur graf yang lebih kompleks.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

2. MAIN RESULTS

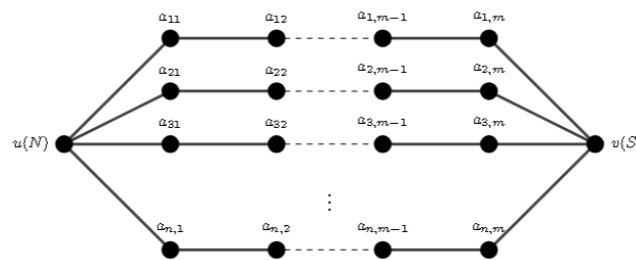
Dalam teori graf, **lintasan (path)** adalah barisan titik yang berbeda, $v_0, v_1, \dots, v_k$, sedemikian sehingga setiap dua titik yang berurutan dihubungkan oleh sebuah sisi. Titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut **titik internal**, sedangkan titik v_0 dan v_k disebut **titik ujung (end vertices)** dari lintasan. Apabila lintasan tersebut merupakan bagian dari graf theta, kedua titik ujung ini berfungsi sebagai **kutub utara (north pole)** dan **kutub selatan (south pole)** yang menghubungkan seluruh lintasan.

Graf theta secara umum merupakan gabungan dari graf lintasan dan memiliki dua titik ujung yang disebut kutub utara dan kutub selatan. Graf theta dikatakan graf theta seragam jika semua lintasan memiliki jumlah titik internal yang sama, graf theta seragam dapat dinotasikan dengan $\theta(n; m)$ dengan m menyatakan **banyaknya lintasan** yang menghubungkan kedua kutub, sedangkan n menyatakan **banyaknya titik internal pada setiap lintasan**. Dengan demikian, setiap lintasan memiliki panjang $n + 1$ sisi atau terdiri atas $n + 2$ titik, termasuk kedua kutub. Rajan *et al.* mendefinisikan graf theta seragam sebagai berikut.

Definisi 2.1.[20] *Graf theta secara umum $\theta(s_1, s_2, \dots, s_n)$ terdiri dari n lintasan dan dua titik ujung berturut-turut yang disebut kutub utara (N) dan kutub selatan (S), dengan setiap titik daun utara lintasan bertetangga dengan titik kutub utara (N) dan setiap daun selatan lintasan bertetangga dengan titik kutub selatan (S).*

Sebuah lintasan yang menghubungkan kutub utara dan kutub selatan disebut *longitude* dan dinotasikan dengan L . Graf theta dikatakan graf theta seragam jika semua *longitude* memiliki jumlah titik internal yang sama. Graf theta dinotasikan dengan $\theta(n; m)$ dengan;

- untuk suatu n merupakan jumlah titik internal pada setiap longitude, dengan $n \geq 1$.
- m menyatakan banyaknya longitude yang menghubungkan kutub utara dan kutub selatan, dengan $m \geq 3$.



Gambar. 2.1. Graf Theta Seragam ($n; m$)

Definisi 2.2.[20] *Graf theta seragam $\theta(n; m)$ adalah graf yang terdiri atas m lintasan (longitude) yang menghubungkan dua titik khusus, yaitu kutub utara u dan kutub selatan v . Setiap lintasan memiliki tepat m titik internal dan semua lintasan saling lepas secara internal (internally vertex-disjoint).*

Secara matematis,

$$V(\theta(n; m)) = \{u, v\} \cup \{a_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

dengan

- u : kutub utara,
- v : kutub selatan,
- $x_{i,j}$: titik internal ke- j pada lintasan ke- i .

Himpunan sisi didefinisikan sebagai

$$E(\theta(n; m)) = \begin{aligned} & \{ua_{i,1} \mid 1 \leq i \leq n\} \\ & \cup \{a_{i,j}a_{i,j+1} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < m\} \\ & \cup \{a_{i,m}v \mid 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian setiap lintasan terdiri atas

$$u - x_{i,1} - x_{i,2} - \dots - x_{i,m} - v.$$

Definisi 2.3. [10] Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf terhubung.

Jarak antara suatu titik $v \in V(G)$ dan suatu sisi $e = xy \in E(G)$ didefinisikan sebagai

$$d(v, e) = \min\{d(v, x), d(v, y)\}.$$

Definisi 2.4. [10] Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf terhubung. Untuk suatu himpunan titik $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$, representasi suatu sisi e terhadap W yang dinotasikan

$$r(e \mid W) = (d(e, w_1), d(e, w_2), \dots, d(e, w_k)).$$

Jika setiap dua sisi berbeda mempunyai representasi yang berbeda, maka W disebut himpunan pembeda sisi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda sisi disebut dimensi metrik sisi dan dinotasikan $edim(G)$.

Diberikan graf theta $\theta(2; 3)$ dengan himpunan titik $V(\theta(2; 3)) = \{u, v, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$ dan himpunan sisi $E(\theta(2; 3)) = \{ua_{21}, ua_{22}, va_{13}, va_{23}, a_{11}a_{12}, a_{12}a_{13}, a_{21}a_{22}, a_{22}a_{23}\}$. Misalkan dipilih $W = \{u, a_{12}, a_{22}\}$. Diperoleh representasi sisi terhadap himpunan W sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(ua_{11} \mid W) &= (0, 1, 2); r(a_{11}a_{12} \mid W) = (1, 0, 1); r(a_{12}a_{13} \mid W) = (2, 0, 2); r(ua_{21} \mid W) = (0, 2, 1); \\ r(a_{21}a_{22} \mid W) &= (1, 1, 0); r(a_{22}a_{23} \mid W) = (2, 2, 0); r(a_{23}v \mid W) = (1, 2, 1). \end{aligned}$$

Dengan demikian W merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 3. Selanjutnya diberikan hasil utama mengenai dimensi metrik sisi pada graf theta seragam.

Teorema 2.5. Diberikan graf theta seragam $\theta(n; m)$ dengan $m \geq 1$, maka

$$edim(\theta(n; m)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } 4 \\ 4, & \text{untuk } n = 5 \\ 5, & \text{untuk } n = 6 \end{cases}$$

Bukti.

Diberikan graf theta seragam $\theta(n; m)$ dengan n, m bilangan bulat untuk $n = 3, 4, 5, 6$ dan $m \geq 1$. Misalkan graf theta seragam memiliki himpunan titik $\theta(n; m) =$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$\{u, v, a_{(ij)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, terdapat tiga kasus untuk menentukan dimensi metrik sisi pada graf theta seragam, yaitu kasus $n = 3, 4, n = 5$ dan $n = 6$.

Kasus 1. Untuk n, m bilangan bulat dengan $n = 3, 4$ dan $m = 7$. Untuk $n = 3$ dipilih $W_e = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\} \subset V(\theta(3; 7))$, sedangkan $n = 4$ dipilih $W_e = \{a_{11}, a_{21}, a_{32}\} \subset V(\theta(4; 7))$. Representasi semua sisi terjadap W_e sebagai berikut

a. untuk $n = 3$

$$\begin{aligned} r(e_1|W_e) &= (0,1,1); r(e_2|W_e) = (0,2,2); r(e_3|W_e) = (1,3,3); r(e_4|W_e) = (2,4,4); \\ r(e_5|W_e) &= (3,5,5); r(e_6|W_e) = (4,6,6); r(e_7|W_e) = (5,7,7); r(e_8|W_e) = (6,7,7); \\ r(e_9|W_e) &= (1,0,1); r(e_{10}|W_e) = (2,0,2); r(e_{11}|W_e) = (3,1,3); \\ r(e_{12}|W_e) &= (4,2,4); r(e_{13}|W_e) = (5,3,5); r(e_{14}|W_e) = (6,4,6); \\ r(e_{15}|W_e) &= (7,5,7); r(e_{16}|W_e) = (7,6,7); r(e_{17}|W_e) = (1,1,0); \\ r(e_{18}|W_e) &= (2,2,0); r(e_{19}|W_e) = (3,3,1); r(e_{20}|W_e) = (4,4,2); \\ r(e_{21}|W_e) &= (5,5,3); r(e_{22}|W_e) = (6,6,4); r(e_{23}|W_e) = (7,7,5); \\ r(e_{24}|W_e) &= (7,7,6); \end{aligned}$$

b. untuk $n = 4$

$$\begin{aligned} r(e_1|W_e) &= (0,1,2); r(e_2|W_e) = (0,2,3); r(e_3|W_e) = (1,3,4); r(e_4|W_e) = (2,4,5); \\ r(e_5|W_e) &= (3,5,6); r(e_6|W_e) = (4,6,7); r(e_7|W_e) = (5,7,7); r(e_8|W_e) = (6,7,6); \\ r(e_9|W_e) &= (1,0,2); r(e_{10}|W_e) = (2,0,3); r(e_{11}|W_e) = (3,1,4); \\ r(e_{12}|W_e) &= (4,2,5); r(e_{13}|W_e) = (5,3,6); r(e_{14}|W_e) = (6,4,7); \\ r(e_{15}|W_e) &= (7,5,7); r(e_{16}|W_e) = (7,6,6); r(e_{17}|W_e) = (1,1,1); \\ r(e_{18}|W_e) &= (2,2,0); r(e_{19}|W_e) = (3,3,0); r(e_{20}|W_e) = (4,4,1); \\ r(e_{21}|W_e) &= (5,5,2); r(e_{22}|W_e) = (6,6,3); r(e_{23}|W_e) = (7,7,4); \\ r(e_{24}|W_e) &= (7,7,5); r(e_{25}|W_e) = (1,1,2); r(e_{26}|W_e) = (2,2,3); \\ r(e_{27}|W_e) &= (3,3,4); r(e_{28}|W_e) = (4,4,5); r(e_{29}|W_e) = (5,5,6); \\ r(e_{30}|W_e) &= (6,6,7); r(e_{31}|W_e) = (7,7,7); r(e_{32}|W_e) = (7,7,6). \end{aligned}$$

Setiap sisi dalam $E(\theta(n; 7))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W_e , maka W_e adalah himpunan pembeda dengan tiga elemen. Selanjutnya akan ditunjukkan $\theta(n; 7)$ tidak mempunyai himpunan pembeda dengan dua elemen. Misalkan $\theta(n; 7)$ mempunyai himpunan pembeda dengan dua elemen, maka terdapat lima kemungkinan pemilihan titik.

- a. Dipilih titik pada lintasan yang sama. Pilih $S = \{a_{11}, a_{12}\}$, terdapat sisi yang memiliki representasi yang sama yaitu $r(e_9|S) = r(e_{17}|S) = (1,2)$. Kontradiksi dengan pengandaian.
- b. Dipilih titik pada lintasan yang berbeda. Pilih $S = \{a_{11}, a_{21}\}$, terdapat sisi yang memiliki

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

- representasi yang sama yaitu $r(e_{23}|S) = r(e_{24}|S) = (7,7)$. Kontradiksi dengan pengandaian.
- c. Salah satu titik kutub (u) dan titik lainnya. Pilih $S = \{u, a_{11}\}$, terdapat sisi yang memiliki representasi yang sama yaitu $r(e_9|S) = r(e_{17}|S) = (0,1)$. Kontradiksi dengan pengandaian.
- d. Salah satu titik kutub (v) dan titik lainnya. Pilih $S = \{v, a_{11}\}$, terdapat sisi yang memiliki representasi yang sama yaitu $r(e_9|S) = r(e_{17}|S) = (7,1)$. Kontradiksi dengan pengandaian.
- e. Dipilih titik kutub. Pilih $S = \{u, v\}$, terdapat sisi yang memiliki representasi yang sama yaitu $r(e_1|S) = r(e_9|S) = r(e_{17}|S) = (0,7)$. Kontradiksi dengan pengandaian.

Dari semua kemungkinan, hasil yang diperoleh menyatakan kontradiksi dengan pengandaian.

Sehingga $\theta(n; 7)$ untuk $n = 3, 4$ tidak memiliki himpunan pembeda dengan dua elemen. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, karena $\theta(n; 7) \not\cong P_n$ maka diperoleh $\text{edim}(\theta(n; 7)) \neq 1$. Oleh karena itu, $\theta(n; 7)$ memiliki himpunan pembeda minimum dengan tiga elemen untuk $n = 3, 4$.

Lebih lanjut untuk $n = 3$ dan $m \geq 1$ dipilih $W_e = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\} \subset V(\theta(3; m))$, diperoleh representasi sisi terhadap W_e

$$\begin{aligned}
 r(e_1|W_e) &= (0,1,1); \\
 r(e_2|W_e) &= (0,2,2); \\
 r(e_3|W_e) &= (1,3,3); \\
 &\vdots \\
 r(e_{\{m-1\}}|W_e) &= (m-3, m-1, m-1); \\
 r(e_{\{m\}}|W_e) &= (m-2, m, m); \\
 r(e_{\{m+1\}}|W_e) &= (m-1, m, m); \\
 r(e_{\{m+2\}}|W_e) &= (1,0,1); \\
 r(e_{\{m+3\}}|W_e) &= (2,0,2); \\
 r(e_{\{m+4\}}|W_e) &= (3,1,3); \\
 &\vdots \\
 r(e_{\{2m\}}|W_e) &= (m-1, m-3, m-1); \\
 r(e_{\{2m+1\}}|W_e) &= (m, m-2, m); \\
 r(e_{\{2m+2\}}|W_e) &= (m, m-1, m); \\
 r(e_{\{2m+3\}}|W_e) &= (1,1,0); \\
 r(e_{\{2m+4\}}|W_e) &= (2,2,0); \\
 r(e_{\{2m+5\}}|W_e) &= (3,3,1);
 \end{aligned}$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$$\begin{aligned} & \vdots \\ r(e_{\{3m+1\}}|W_e) &= (m-1, m-1, m-3); \\ r(e_{\{3m+2\}}|W_e) &= (m, m, m-2); \\ r(e_{\{3m+3\}}|W_e) &= (m, m, m-1); \end{aligned}$$

Kasus 2. Untuk $n = 5$, diambil suatu himpunan $W_e = \{a_{11}, a_{24}, a_{42}, a_{56} \subseteq V(\theta(5; m))$, diperoleh representasi semua sisi terhadap W_e sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(e_1|W_e) &= (0, 4, 2, 6); \\ r(e_2|W_e) &= (0, 5, 3, 7); \\ & \vdots \\ r(e_m|W_e) &= (m-2, m-2, m, m-4); \\ r(e_{\{m+1\}}|W_e) &= (m-1, m-3, m-1, m-5); \\ r(e_{\{m+2\}}|W_e) &= (1, 3, 2, 6); \\ r(e_{\{m+3\}}|W_e) &= (2, 2, 3, 7); \\ & \vdots \\ r(e_{\{2m+1\}}|W_e) &= (m, m-5, m, m-4); \\ r(e_{\{2m+2\}}|W_e) &= (m, m-4, m-1, m-5); \\ r(e_{\{2m+3\}}|W_e) &= (1, 4, 2, 6); \\ r(e_{\{2m+4\}}|W_e) &= (2, 5, 3, 7); \\ & \vdots \\ r(e_{\{4m+3\}}|W_e) &= (m, m-2, m-3, m-4); \\ r(e_{\{4m+4\}}|W_e) &= (m, m-3, m-2, m-3); \\ r(e_{\{4m+5\}}|W_e) &= (1, 4, 2, 5); \\ & \vdots \\ r(e_{\{5m+4\}}|W_e) &= (m, m-2, m, m-7); \\ r(e_{\{5m+5\}}|W_e) &= (m, m-3, m-1, m-6). \end{aligned}$$

Setiap sisi pada $E(\theta(5; m))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W_e , maka W_e adalah himpunan pembeda dengan empat elemen. Selanjutnya akan ditunjukkan $\theta(5; m)$ tidak mempunyai himpunan pembeda kurang dari empat elemen. Misalkan $\theta(5; m)$ mempunyai himpunan pembeda dengan tiga elemen, dipilih $S = \{a_{11}, a_{24}, a_{42}\}$, maka terdapat paling sedikit dua sisi $x, y \subset$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$E(\theta(5; m))$. Sedemikian sehingga $r(e_x|S) = r(e_y|S) = (1, 4, 2)$, hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, karena $\theta(5; m) \not\cong P_n$ maka diperoleh $\text{edim}(\theta(5; m)) \neq 1$. Oleh karena itu, $\theta(5; m)$ memiliki himpunan pembeda minimum dengan empat elemen untuk $n = 5$.

Kasus 3. Untuk $n = 6$ dipilih suatu himpunan $W_e = \{a_{12}, a_{31}, a_{42}, a_{51}, a_{64}\} \subseteq V(\theta(6; m))$, akan diperoleh representasi semua sisi terhadap W_e sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(e_1|W_e) &= (1, 1, 2, 1, 4); \\
 r(e_2|W_e) &= (0, 2, 3, 2, 5); \\
 &\vdots \\
 r(e_m|W_e) &= (m - 3, m, m, m, m - 2); \\
 r(e_{\{m+1\}}|W_e) &= (m - 2, m, m - 1, m, m - 3); \\
 r(e_{\{m+2\}}|W_e) &= (2, 1, 2, 1, 4); \\
 r(e_{\{m+3\}}|W_e) &= (3, 2, 3, 2, 5); \\
 &\vdots \\
 r(e_{\{2m\}}|W_e) &= (m, m - 1, m, m - 1, m - 1); \\
 r(e_{\{2m+1\}}|W_e) &= (m, m, m, m, m - 2); \\
 r(e_{\{2m+2\}}|W_e) &= (m - 1, m, m - 1, m, m - 3); \\
 r(e_{\{2m+3\}}|W_e) &= (2, 0, 2, 1, 4); \\
 r(e_{\{2m+4\}}|W_e) &= (3, 0, 3, 2, 5); \\
 &\vdots \\
 r(e_{\{3m+2\}}|W_e) &= (m, m - 2, m, m, m - 2); \\
 r(e_{\{3m+3\}}|W_e) &= (m - 1, m - 1, m - 1, m, m - 3); \\
 r(e_{\{3m+4\}}|W_e) &= (2, 1, 1, 1, 4); \\
 r(e_{\{3m+5\}}|W_e) &= (3, 2, 0, 2, 5); \\
 &\vdots \\
 r(e_{\{4m+3\}}|W_e) &= (m, m, m - 3, m, m - 2); \\
 r(e_{\{4m+4\}}|W_e) &= (m, m, m - 3, m, m - 2); \\
 r(e_{\{4m+5\}}|W_e) &= (2, 1, 2, 0, 4); \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$$\begin{aligned}
 r(e_{\{5m+4\}}|W_e) &= (m, m, m, m-2, m-2); \\
 r(e_{\{5m+5\}}|W_e) &= (m-1, m, m-1, m-1, m-3); \\
 r(e_{\{5m+6\}}|W_e) &= (2, 1, 2, 1, 3); \\
 &\vdots \\
 r(e_{\{6m+5\}}|W_e) &= (m, m, m, m, m-5); \\
 r(e_{\{6m+6\}}|W_e) &= (m-1, m, m-1, m, m-4);
 \end{aligned}$$

Setiap sisi pada $E(\theta(6; m))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W_e , maka W_e adalah himpunan pembeda dengan empat elemen. Selanjutnya akan ditunjukkan $\theta(6; m)$ tidak mempunyai himpunan pembeda kurang dari empat elemen. Misalkan $\theta(6; m)$ mempunyai himpunan pembeda dengan tiga elemen, dipilih $S = \{a_{12}, a_{31}, a_{42}, a_{51}\}$, maka terdapat paling sedikit dua sisi $x, y \subset E(\theta(6; m))$. Sedemikian sehingga $r(e_x|S) = r(e_y|S) = (3, 4, 3, 4)$. Kontradiksi dengan pengandaian, jadi terbukti bahwa $\text{edim}(\theta(n; m)) = 5$ untuk $n = 6$

Graf bunga matahari SF_n merupakan salah satu graf yang terbangun dari graf roda W_n dan graf K_1 sebanyak n [18], untuk setiap graf k_1 terhubung langsung dengan dua titik berurutan dari cycle graf roda W_n . Indeks n merujuk pada banyaknya titik pada cycle dari graf roda yang membangun graf bunga matahari, sehingga $n \geq 3$. Diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf bunga matahari SF_n sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(SF_n) &= \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_n\}, \\
 E(SF_n) &= E_i \cup E_j \cup E_k
 \end{aligned}$$

dimana

$$E_i = \{v_0 v_1 | i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$E_j = \{v_i v_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_n v_1 | i = n+1, n+2, \dots, 2n\},$$

$$E_k = \{v_i w_i | i = 1, 2, \dots, n\}, k = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n, 3n+1, \dots, 4n.$$

Dengan demikian, diperoleh jumlah titik pada graf bunga matahari SF_n sebanyak $2n+1$ dan jumlah sisi pada graf bunga matahari sebanyak $4n$.

Teorema 2.6. Jika SF_n adalah graf bunga matahari dengan $n \geq 3$, maka

$$\text{edim}(SF_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 4, 6 \\ 5, & \text{untuk } n = 3, 5, 7 \\ 6, & \text{untuk } n = 8 \\ n-3, & \text{untuk } n \geq 9 \end{cases}$$

Bukti.

Diberikan graf bunga matahari SF_n dengan $n \geq 3$. Untuk menentukan dimensi metrik sisi pada graf bunga matahari akan 7 kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $n = 3$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(SF_3) = 5$. Misalkan W_e merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 5. Dipilih $W_e = \{v_0, v_1, v_2, w_1, w_2\}$, diperoleh representasi jarak sisi terhadap himpunan pembeda W_e sebagai berikut:

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$$\begin{array}{lll} r(e_1|W_e) = (0,0,1,1,1), & r(e_2|W_e) = (0,1,0,2,1), & r(e_3|W_e) = (0,1,1,1,2), \\ r(e_4|W_e) = (1,0,0,1,1), & r(e_5|W_e) = (1,1,0,1,1), & r(e_6|W_e) = (1,0,1,1,1), \\ r(e_7|W_e) = (1,0,1,0,1), & r(e_8|W_e) = (1,0,1,1,0), & r(e_9|W_e) = (1,1,0,2,0), \\ r(e_{10}|W_e) = (1,1,0,2,1), & r(e_{11}|W_e) = (1,1,1,1,2), & r(e_{12}|W_e) = (1,1,1,0,2). \end{array}$$

Berdasarkan representasi di atas, diperoleh bahwa jarak setiap sisi terhadap himpunan pembeda W_e memiliki hasil yang berbeda, sehingga W_e dengan kardinalitas 5 merupakan himpunan pembeda sisi. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 4. Diperoleh penyelesaian sebagai berikut.

- Dipilih $S = \{v_0, v_i, v_j, v_k\}$, terdapat dua sisi e_i, e_j , dengan $i = j$ sehingga $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (1,1,1,0)$.
- Dipilih $S = \{v_0, v_i, v_j, w_i\}$, terdapat dua sisi e_i, e_j , dengan $i = j$ sehingga $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (1,1,0,2)$.
- Dipilih $S = \{v_0, v_i, w_i, w_j\}$, terdapat dua sisi e_i, e_j , dengan $i = j$ sehingga $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (1,0,1,1)$.
- Dipilih $S = \{v_0, w_i, w_j, w_k\}$, terdapat dua sisi e_i, e_j , dengan $i = j$ sehingga $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (1,1,1,1)$.
- Dipilih $S = \{v_i, v_j, v_k, w_i\}$, terdapat dua sisi e_i, e_j , dengan $i = j$ sehingga $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (1,0,1,2)$.
- Dipilih $S = \{v_i, v_j, w_i, w_j\}$, terdapat dua sisi e_i, e_j , dengan $i = j$ sehingga $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (0,1,2,1)$.
- Dipilih $S = \{v_i, w_i, w_j, w_k\}$, terdapat dua sisi e_i, e_j , dengan $i = j$ sehingga $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (0,1,1,1)$.

Berdasarkan representasi di atas, diperoleh bahwa S dengan kardinalitas 4 bukan himpunan pembeda sisi. Artinya dimensi metrik sisi $\text{edim}(SF_3) = 5$. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 3 dan 2. Diperoleh penyelesaian dengan cara yang sama seperti pada kardinalitas 4. Dari penyelesaian tersebut, diperoleh himpunan S bukan himpunan pembeda. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 1. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, maka $\text{edim}(SF_3) \neq 1$, akibatnya $\text{edim}(SF_3) = 5$.

Kasus 2. Untuk $n = 4$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(SF_4) = 4$. Dipilih $W_e = \{v_0, w_2, w_3, w_4\}$ himpunan pembeda, diperoleh representasi jarak sisi terhadap himpunan pembeda W_e sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} r(e_1|W_e) = (0,2,2,1), & r(e_2|W_e) = (0,1,2,2), & r(e_3|W_e) = (0,1,1,2), \\ r(e_4|W_e) = (0,2,1,1), & r(e_5|W_e) = (1,1,2,1), & r(e_6|W_e) = (1,1,1,2), \\ r(e_7|W_e) = (1,1,1,1), & r(e_8|W_e) = (1,2,1,1), & r(e_9|W_e) = (1,2,2,1), \\ r(e_{10}|W_e) = (1,1,2,2), & r(e_{11}|W_e) = (1,0,2,2), & r(e_{12}|W_e) = (1,0,1,2), \\ r(e_{13}|W_e) = (1,1,0,2), & r(e_{14}|W_e) = (1,2,0,1), & r(e_{15}|W_e) = (1,2,1,0), \\ r(e_{16}|W_e) = (1,2,2,0). \end{array}$$

Berdasarkan representasi di atas, diperoleh bahwa jarak setiap sisi terhadap himpunan pembeda W_e memiliki hasil yang berbeda, sehingga himpunan W_e dengan merupakan himpunan pembeda sisi. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 3 dan 2, dengan cara yang sama seperti kasus sebelumnya. diperoleh bahwa untuk himpunan S dengan kardinalitas 3 dan 2, terdapat pasangan sisi e_i dan e_j dengan $i = j$ sehingga representasi $r(e_i|S) = r(e_j|S)$. Oleh karena itu, himpunan S dengan kardinalitas 3 dan 2 bukan merupakan himpunan pembeda sisi.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

Kemudian misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 1. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, maka $\text{edim}(SF_4) \neq 1$, sedemikian sehingga $\text{edim}(SF_4) = 4$.

Kasus 3. Untuk $n = 5$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(SF_5) = 5$. Misalkan W_e merupakan himpunan pembeda. Dipilih $W_e = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, diperoleh representasi jarak sisi terhadap himpunan W_e sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} r(e_1|W_e) = (1,2,2,2,1), & r(e_2|W_e) = (1,1,2,2,2), & r(e_3|W_e) = (2,1,1,2,2), \\ r(e_4|W_e) = (2,2,1,1,2), & r(e_5|W_e) = (2,2,2,1,1), & r(e_6|W_e) = (1,1,2,2,1), \\ r(e_7|W_e) = (1,1,1,2,2), & r(e_8|W_e) = (2,1,1,1,2), & r(e_9|W_e) = (2,2,1,1,1), \\ r(e_{10}|W_e) = (1,2,2,1,1), & r(e_{11}|W_e) = (0,2,3,2,1), & r(e_{12}|W_e) = (0,1,2,3,2), \\ r(e_{13}|W_e) = (1,0,2,3,2), & r(e_{14}|W_e) = (2,0,1,2,3), & r(e_{15}|W_e) = (2,1,0,2,3), \\ r(e_{16}|W_e) = (3,2,0,1,2), & r(e_{17}|W_e) = (3,2,1,0,2), & r(e_{18}|W_e) = (2,3,2,0,1), \\ r(e_{19}|W_e) = (2,3,2,1,0), & r(e_{20}|W_e) = (1,2,3,2,0). \end{array}$$

Berdasarkan representasi di atas, diperoleh bahwa jarak setiap sisi terhadap himpunan W_e memiliki hasil yang berbeda. Sehingga W_e merupakan himpunan pembeda sisi. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 4, 3, dan 2 dengan menggunakan cara yang sebelumnya, terdapat pasangan sisi e_i dan e_j dengan $i = j$ sehingga representasi $r(e_i|S) = r(e_j|S)$. Artinya, himpunan S dengan kardinalitas 4, 3, dan 2 bukan merupakan himpunan pembeda sisi. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 1. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, maka $\text{edim}(SF_5) \neq 1$, akibatnya $\text{edim}(SF_5) = 5$.

Kasus 4. Untuk $n = 6$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(SF_6) = 4$. Misalkan W_e merupakan himpunan pembeda. Dipilih $W_e = \{w_1, w_2, w_4, w_5\}$, diperoleh representasi jarak sisi terhadap himpunan pembeda W_e sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} r(e_1|W_e) = (1,2,2,2), & r(e_2|W_e) = (1,1,2,2), & r(e_3|W_e) = (2,1,2,2), \\ r(e_4|W_e) = (2,2,1,2), & r(e_5|W_e) = (2,2,1,1), & r(e_6|W_e) = (2,2,2,1), \\ r(e_7|W_e) = (1,1,3,2), & r(e_8|W_e) = (1,1,2,1), & r(e_9|W_e) = (2,1,1,2), \\ r(e_{10}|W_e) = (3,2,1,1), & r(e_{11}|W_e) = (2,3,1,1), & r(e_{12}|W_e) = (1,2,2,1), \\ r(e_{13}|W_e) = (0,2,3,2), & r(e_{14}|W_e) = (0,1,3,3), & r(e_{15}|W_e) = (1,0,3,3), \\ r(e_{16}|W_e) = (2,0,2,3), & r(e_{17}|W_e) = (2,1,2,3), & r(e_{18}|W_e) = (3,2,1,2), \\ r(e_{19}|W_e) = (3,2,0,2), & r(e_{20}|W_e) = (3,3,0,1), & r(e_{21}|W_e) = (3,3,1,0), \\ r(e_{22}|W_e) = (2,3,2,0), & r(e_{23}|W_e) = (2,3,2,1), & r(e_{24}|W_e) = (1,2,3,2). \end{array}$$

Berdasarkan representasi di atas, diperoleh bahwa jarak setiap sisi terhadap himpunan W_e memiliki hasil yang berbeda. Sehingga W_e dengan merupakan himpunan pembeda sisi. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 3 dan 2, dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya, terdapat pasangan sisi e_i dan e_j dengan $i = j$ sehingga representasi $r(e_i|S) = r(e_j|S)$. Artinya, himpunan S bukan merupakan himpunan pembeda sisi. Kemudian, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 1. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, maka $\text{edim}(SF_6) \neq 1$, jelas bahwa himpunan pembeda W_e dengan kardinalitas 4 merupakan kardinalitas minimum. Akibatnya, $\text{edim}(SF_6) = 4$.

Kasus 5. Untuk $n = 7$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(SF_7) = 5$. Misalkan W_e merupakan himpunan pembeda. Dipilih $W_e = \{w_1, w_2, w_3, w_5, w_6\}$, diperoleh representasi sisi terhadap himpunan pembeda W_e sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} r(e_1|W_e) = (1,2,2,2,2), & r(e_2|W_e) = (1,1,2,2,2), & r(e_3|W_e) = (2,1,1,2,2), \\ r(e_4|W_e) = (2,2,1,2,2), & r(e_5|W_e) = (2,2,2,1,2), & r(e_6|W_e) = (2,2,2,1,1), \\ r(e_7|W_e) = (2,2,2,2,1), & r(e_8|W_e) = (1,1,2,3,2), & r(e_9|W_e) = (1,1,1,3,3), \\ r(e_{10}|W_e) = (2,1,1,2,3), & r(e_{11}|W_e) = (3,2,1,1,2), & r(e_{12}|W_e) = (3,3,2,1,1), \end{array}$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$$\begin{array}{lll}
 r(e_{13}|W_e) = (2,3,3,1,1), & r(e_{14}|W_e) = (1,2,3,2,1), & r(e_{15}|W_e) = (0,2,3,3,2), \\
 r(e_{16}|W_e) = (0,1,2,3,3), & r(e_{17}|W_e) = (1,0,2,3,3), & r(e_{18}|W_e) = (2,0,1,3,3), \\
 r(e_{19}|W_e) = (2,1,0,3,3), & r(e_{20}|W_e) = (3,2,0,2,3), & r(e_{21}|W_e) = (3,2,1,2,3), \\
 r(e_{22}|W_e) = (3,3,2,1,2), & r(e_{23}|W_e) = (3,3,2,0,2), & r(e_{24}|W_e) = (3,3,3,0,1), \\
 r(e_{25}|W_e) = (3,3,3,1,0), & r(e_{26}|W_e) = (2,3,3,2,0), & r(e_{27}|W_e) = (2,3,3,2,1), \\
 r(e_{28}|W_e) = (1,2,3,3,2).
 \end{array}$$

Berdasarkan representasi jarak sisi terhadap himpunan pembeda W_e memiliki hasil yang berbeda. Sehingga W_e dengan merupakan himpunan pembeda sisi. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 4,3, dan 2, dengan menggunakan cara yang sama, terdapat sisi e_i dan e_j dengan $i = j$ sehingga representasi $r(e_i|S) = r(e_j|S)$. Artinya, himpunan S dengan kardinalitas 4,3, dan 2 bukan himpunan pembeda sisi. Kemudian, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 1. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, maka $\text{edim}(SF_7) \neq 1$, jelas bahwa himpunan W_e dengan kardinalitas 5 merupakan himpunan pembeda minimum. Akibatnya, $\text{edim}(SF_7) = 5$.

Kasus 6. Untuk $n = 8$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(SF_8) = 6$. Misalkan W_e merupakan himpunan pembeda. Dipilih $W_e = \{w_1, w_2, w_4, w_5, w_7, w_8\}$, diperoleh representasi jarak sisi terhadap himpunan W_e sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}
 r(e_1|W_e) = (1,2,2,2,2,1), & r(e_2|W_e) = (1,1,2,2,2,2), & r(e_3|W_e) = (2,1,2,2,2,2), \\
 r(e_4|W_e) = (2,2,1,2,2,2), & r(e_5|W_e) = (2,2,1,1,2,2), & r(e_6|W_e) = (2,2,2,1,2,2), \\
 r(e_7|W_e) = (2,2,2,2,1,2), & r(e_8|W_e) = (2,2,2,2,1,1), & r(e_9|W_e) = (1,1,3,3,2,1), \\
 r(e_{10}|W_e) = (1,1,2,3,3,2), & r(e_{11}|W_e) = (2,1,1,2,3,3), & r(e_{12}|W_e) = (3,2,1,1,3,3), \\
 r(e_{13}|W_e) = (3,3,1,1,2,3), & r(e_{14}|W_e) = (3,3,2,1,1,2), & r(e_{15}|W_e) = (2,3,3,2,1,1), \\
 r(e_{16}|W_e) = (1,2,3,3,1,1), & r(e_{17}|W_e) = (0,2,3,3,2,1), & r(e_{18}|W_e) = (0,1,3,3,3,2), \\
 r(e_{19}|W_e) = (1,0,3,3,3,2), & r(e_{20}|W_e) = (2,0,2,3,3,3), & r(e_{21}|W_e) = (2,1,2,3,3,3), \\
 r(e_{22}|W_e) = (3,2,1,2,3,3), & r(e_{23}|W_e) = (3,2,0,2,3,3), & r(e_{24}|W_e) = (3,3,0,1,3,3), \\
 r(e_{25}|W_e) = (3,3,1,0,3,3), & r(e_{26}|W_e) = (3,3,2,0,2,3), & r(e_{27}|W_e) = (3,3,2,1,2,3), \\
 r(e_{28}|W_e) = (3,3,3,2,1,2), & r(e_{29}|W_e) = (3,3,3,2,0,2), & r(e_{30}|W_e) = (2,3,3,3,0,1), \\
 r(e_{31}|W_e) = (2,3,3,3,1,0), & r(e_{32}|W_e) = (1,2,3,3,2,0).
 \end{array}$$

Berdasarkan representasi jarak sisi terhadap himpunan pembeda W_e memiliki hasil yang berbeda. Sehingga W_e dengan merupakan himpunan pembeda sisi. Selanjutnya, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 5,4,3, dan 2 dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya, terdapat e_i dan e_j dengan $i = j$ sehingga representasi $r(e_i|S) = r(e_j|S)$. Akibatnya himpunan S dengan kardinalitas 5,4,3, dan 2 bukan merupakan himpunan pembeda sisi. Kemudian, misalkan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas 1. Berdasarkan karakterisasi pada **Teorema 1.1**, maka $\text{edim}(SF_8) \neq 1$, jelas bahwa himpunan W_e dengan kardinalitas 6 merupakan himpunan pembeda sisi minimum, akibatnya $\text{edim}(SF_8) = 6$.

Kasus 7. Untuk $n \geq 9$ akan dibuktikan bahwa $\text{edim}(SF_n) = n - 3$.

1. Akan ditunjukkan $\text{edim}(SF_n) \geq n - 3$. Andaikan S merupakan himpunan pembeda sisi dengan kardinalitas $n - 4$. Dipilih $S = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-4}\}$, sedemikian sehingga terdapat paling sedikit 2 sisi yaitu $e_i, e_j \in E$ dengan $i = j$, maka $r(e_i|S) = r(e_j|S) = (2,3, \dots, 2)$. Karena $r(e_i|S) = r(e_j|S)$, sehingga S bukan merupakan himpunan pembeda sisi. Pernyataan ini kontradiksi, maka pengandaian harus diingkari dan diperoleh $\text{edim}(SF_n) \geq n - 3$.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

2. Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(SF_n) \leq n - 3$ dan dipilih $W_e = \{w_1, w_2, w_7, w_5, w_7, w_8, \dots, w_n - 1\}$. Berdasarkan karakteristik dari graf bunga matahari SF_n , diketahui bahwa $ei = \{v_0 v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, $ej = \{v_i v_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_n v_1\}$, $j = n + 1, n + 2, \dots, 2n$ dan $ek = \{v_i w_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, $k = 2n + 1, 2n + 2, \dots, 3n, \dots, 4n$, sehingga diperoleh representasi setiap simpul terhadap himpunan pembeda W_e sebagai berikut.

Tabel 2.1. Representasi Setiap Sisi Terhadap W_e pada Graf SF_n

e	$r(e W_e)$	Keterangan
$e_i = \{v_0 v_i\}$	(1, 2, ..., 2)	$i = 1$
	(1, 1, 2, ..., 2)	$i = 2$
	(2, 1, 2, ..., 2)	$i = 3$
	(2, 2, 1, 2, ..., 2)	$i = 4$
	(2, 2, 1, 1, 2, ..., 2)	$i = 5$
	(2, 2, 2, 1, 2, ..., 2)	$i = 6$
	(2, ..., 2, 1, 2, ..., 2)	$i = 7$
	(2, ..., 2, 1, 1, 2, ..., 2)	$7 < i < n$
	(2, ..., 2, 1)	$i = n$
	(1, 1, 3, ..., 3, 2)	$j = n + 1, i = 1$
$e_j = \{v_i v_{i+1}\}$	(1, 1, 2, 3, ..., 3)	$j = n + 2, i = 2$
	(2, 1, 1, 2, 3, ..., 3)	$j = n + 3, i = 3$
	(3, 2, 1, 1, 3, ..., 3)	$j = n + 4, i = 4$
	(3, 3, 1, 1, 2, 3, ..., 3)	$j = n + 5, i = 5$
	(3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, ..., 3)	$j = n + 6, i = 6$
	(3, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, ..., 3)	$j = n + 7, i = 7$
	(3, ..., 3, 1, 1, 1, 2, 3, ..., 3)	$j = n + 8, i = 8$
	(3, ..., 3, 2, 1, 1, 1, 2, 3, ..., 3)	$n + 8 < j < n + 13, 8 < i < 13$
	(3, ..., 3, 2, 1, 1, 1)	$j = n + 13, i = 13$
	(2, 3, ..., 3, 2, 1, 1)	$j = n + 14, i = 14$
$e_j = \{v_n v_1\}$	(1, 2, 3, ..., 3, 2, 1)	$j = 2n$
$e_k = \{v_i w_i\}$	(0, 2, 3, ..., 3, 2)	$k = 2n + 1, i = 1$
	(1, 0, 3, ..., 3)	$k = 2n + 3, i = 2$
	(2, 1, 2, 3, ..., 3)	$k = 2n + 5, i = 3$
	(3, 2, 0, 2, 3, ..., 3)	$k = 2n + 7, i = 4$
	(3, 3, 1, 0, 3, ..., 3)	$k = 2n + 9, i = 5$
	(3, 3, 2, 1, 2, 3, ..., 3)	$k = 2n + 11, i = 6$
	(3, 3, 3, 2, 0, 2, 3, ..., 3)	$k = 2n + 13, i = 7$
	(3, 3, 3, 3, 1, 0, 2, 3, ..., 3)	$k = 3n, i = 8$
	(3, ..., 3, 2, 1, 0, 2, 3, ..., 3)	$k = 3n + 2, i = 9$
	(3, ..., 3, 2, 1, 0, 2, 3, ..., 3)	$k = 3n + 4, i = 10$
	(3, ..., 3, 2, 1, 0, 2, 3, ..., 3)	$k = 3n + 6, i = 11$
	(3, ..., 3, 2, 1, 0, 2, 3, ..., 3)	$k = 3n + 8, i = 12$
	(3, ..., 3, 2, 1, 0, 2)	$k = 3n + 10, i = 13$
	(3, ..., 3, 2, 1, 0)	$k = 3n + 12, i = 14$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$e_k = \{v_{i+1}w_i\}$	$(2, 3, \dots, 3, 2, 1)$	$k = 3n + 14, i = 15$
	$(0, 1, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 2, i = 1$
	$(2, 0, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 4, i = 2$
	$(3, 2, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 6, i = 3$
	$(3, 3, 0, 1, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 8, i = 4$
	$(3, 3, 2, 0, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 10, i = 5$
	$(3, 3, 3, 2, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 12, i = 6$
	$(3, 3, 3, 3, 0, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 14, i = 7$
	$(3, \dots, 3, 2, 0, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 3n + 1, i = 8$
	$(3, \dots, 3, 2, 0, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 3n + 3, i = 9$
	$(3, \dots, 3, 2, 0, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 3n + 5, i = 10$
	$(3, \dots, 3, 2, 0, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 3n + 7, i = 11$
	$(3, \dots, 3, 2, 0, 1, 2)$	$k = 3n + 9, i = 12$
	$(3, \dots, 3, 2, 0, 1)$	$k = 3n + 11, i = 13$
	$(2, 3, \dots, 3, 2, 0)$	$k = 3n + 13, i = 14$
	$(1, 2, 3, \dots, 3, 2)$	$k = 4n$
e	$r(e W_e)$	Keterangan
$e_i = \{v_0v_1\}$	$(1, 2, \dots, 2)$	$i = 1$
	$(1, 1, 2, \dots, 2)$	$i = 2$
	$(2, 1, 2, \dots, 2)$	$i = 3$
	$(2, 2, 1, 2, \dots, 2)$	$i = 4$
	$(2, 2, 1, 1, 2, \dots, 2)$	$i = 5$
	$(2, 2, 2, 1, 2, \dots, 2)$	$i = 6$
	$(2, \dots, 2, 1, 2, \dots, 2)$	$i = 7$
$e_j = \{v_iv_{i+1}\}$	$(2, \dots, 2, 1, 1, 2, \dots, 2)$	$7 < i < n$
	$(2, \dots, 2, 1)$	$i = n$
	$(1, 1, 3, \dots, 3, 2)$	$j = n + 1, i = 1$
	$(1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$j = n + 2, i = 2$
	$(2, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$j = n + 3, i = 3$
	$(3, 2, 1, 1, 3, \dots, 3)$	$j = n + 4, i = 4$
	$(3, 3, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$j = n + 5, i = 5$
	$(3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$j = n + 6, i = 6$
	$(3, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$j = n + 7, i = 7$
	$(3, \dots, 3, 1, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$j = n + 8, i = 8$
	$(3, \dots, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$n + 8 < j < n + 13, 8 < i < 13$
	$(3, \dots, 3, 2, 1, 1, 1)$	$j = n + 13, i = 13$
	$(2, 3, \dots, 3, 2, 1, 1)$	$j = n + 14, i = 14$
	$(1, 2, 3, \dots, 3, 2, 1)$	$j = 2n$
$e_j = \{v_nv_1\}$		
$e_k = \{v_iw_i\}$	$(0, 2, 3, \dots, 3, 2)$	$k = 2n + 1, i = 1$
	$(1, 0, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 3, i = 2$
	$(2, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 5, i = 3$
	$(3, 2, 0, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 7, i = 4$
	$(3, 3, 1, 0, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 9, i = 5$
	$(3, 3, 2, 1, 2, 3, \dots, 3)$	$k = 2n + 11, i = 6$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

$e_k = \{v_{i+1}w_i\}$	$(3,3,3,2,0,2,3\dots,3)$	$k = 2n + 13, i = 7$
	$(3,3,3,3,1,0,2,3\dots,3)$	$k = 3n, i = 8$
	$(3,\dots,3,2,1,0,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 2, i = 9$
	$(3,\dots,3,2,1,0,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 4, i = 10$
	$(3,\dots,3,2,1,0,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 6, i = 11$
	$(3,\dots,3,2,1,0,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 8, i = 12$
	$(3,\dots,3,2,1,0,2)$	$k = 3n + 10, i = 13$
	$(3,\dots,3,2,1,0)$	$k = 3n + 12, i = 14$
	$(2,3,\dots,3,2,1)$	$k = 3n + 14, i = 15$
	$(0,1,3\dots,3)$	$k = 2n + 2, i = 1$
	$(2,0,2,3\dots,3)$	$k = 2n + 4, i = 2$
	$(3,2,1,2,3\dots,3)$	$k = 2n + 6, i = 3$
	$(3,3,0,1,3\dots,3)$	$k = 2n + 8, i = 4$
	$(3,3,2,0,2,3\dots,3)$	$k = 2n + 10, i = 5$
	$(3,3,3,2,1,2,3\dots,3)$	$k = 2n + 12, i = 6$
	$(3,3,3,3,0,1,2,3\dots,3)$	$k = 2n + 14, i = 7$
	$(3,\dots,3,2,0,1,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 1, i = 8$
	$(3,\dots,3,2,0,1,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 3, i = 9$
	$(3,\dots,3,2,0,1,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 5, i = 10$
	$(3,\dots,3,2,0,1,2,3\dots,3)$	$k = 3n + 7, i = 11$
	$(3,\dots,3,2,0,1,2)$	$k = 3n + 9, i = 12$
	$(3,\dots,3,2,0,1)$	$k = 3n + 11, i = 13$
	$(2,3,\dots,3,2,0)$	$k = 3n + 13, i = 14$
	$(1,2,3,\dots,3,2)$	$k = 4n$

Berdasarkan **Tabel 2.1.** diperoleh bahwa setiap sisi pada graf SF_n memberikan representasi yang berbeda terhadap W_e , sehingga W_e dengan kardinalitas $n - 3$ merupakan himpunan pembeda sisi. Dengan demikian, $\text{edim}(SF_n) = n - 3$.

3. CONCLUSION

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf theta seragam $\theta(n; m)$ dan graf bunga matahari SF_n memiliki nilai dimensi metrik sisi yang bergantung pada karakteristik strukturnya. Pada graf theta seragam diperoleh bahwa nilai dimensi metrik sisi berturut-turut adalah 3 untuk $n = 3$ dan 4, 4 untuk $n = 5$, serta 5 untuk $n = 6$. Sementara itu, pada graf bunga matahari diperoleh bahwa nilai dimensi metrik sisi bervariasi sesuai dengan banyaknya titik, yaitu 4 untuk $n = 4$ dan 6, 5 untuk $n = 3, 5, 7$, 6 untuk $n = 8$, serta mengikuti pola umum $n - 3$ untuk $n \geq 9$. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa jumlah lintasan dan kompleksitas struktur graf berpengaruh langsung terhadap banyaknya titik minimum yang diperlukan untuk membedakan setiap sisi secara unik, sehingga memperkaya kajian tentang dimensi metrik sisi pada graf-graf khusus.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare that there are no conflicts of interest regarding the research, authorship, and publication of this article entitled “Edge Metric Dimension of Uniform Theta Graphs and Sunflower Graphs.”

REFERENCES

- [1] Abbas, S., Raza, Z., Siddiqui, N., Khan, F., & Whangbo, T. , 2022. Edge metric dimension of honeycomb and hexagonal networks for IoT. *Computers, Materials and Continua*, Vol.71, No.2, 2683–2695.
- [2] Abbas, W., Chaudhry, F., Farooq, U., Azeem, M., & Shang, Y. , 2024. Investigating metric dimension and edge metric dimension of hexagonal boron nitride and carbon nanotubes. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.17, No.3, 2055–2072.
- [3] Adawiyah, R., Dafik, Alfarisi, R., Prihandini, R. M., & Agustin, I. H. , 2018. Edge metric dimension on some families of tree. *Journal of Physics: Conference Series*. [Online]. Available: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1180/1/012005>
- [4] Ahsan, M., Zahid, Z., & Zafar, S. , 2020. Edge metric dimension of some classes of circulant graphs. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, Vol.28, No.3, 15–37.
- [5] Buhaerah, Z., Busrah, & Sanjaya, H. , 2022. Teori graf dan aplikasinya. [Online]. Available: <https://repository.iainpare.ac.id/id/eprint/3489/>
- [6] Chandran, S. C., & Reji, T., 2024. Edge metric dimension of some Cartesian product of graphs. *Proyecciones*, Vol.43, No.3, 587–611.
- [7] Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P., 2000. The partition dimension of resolvability in graphs. *Aequationes Mathematicae*, Vol. 59, No.1, 45–54.
- [8] Farooq, M. U., et al., 2024. Computing edge version of metric dimension of certain chemical networks. *Scientific Reports*, Vol. 14. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-62063-6>
- [9] Filipović, V., Kartelj, A., & Kratica, J., 2019. Edge metric dimension of some generalized Petersen graphs. *Results in Mathematics*, Vol. 74 (2019). , 182, <https://doi.org/10.1007/s00025-019-1105-9>
- [10] Kelenc, A., Tratnik, N., & Yero, I. G., 2018. Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*., Vol. 251(2018), 204-220
- [11] Knor, M., Majstorović, S., Masa Toshi, A. T., Škrekovski, R., & Yero, I. G., 2021. Graphs with the edge metric dimension smaller than the metric dimension. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 401(2021). , 126076, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126076>
- [12] Kusmayadi, T. A., & Rahmadi, D. , 2025. *Dimensi metrik dari graf*. Star Digital Publishing.
- [13] Mhagama, L. S., Husin, M. N., Nadeem, M. F., & Ali, W., 2025. Computing the edge metric dimension of the line graph of molecular graphs of some classes of antiviral drugs. *Contemporary Mathematics (Singapore)*, Vol.6, No.2, 1784–1802.
- [14] Mhagama, L. S., Nadeem, M. F., & Husin, M. N., 2024. On the edge metric dimension of some classes of cacti. *AIMS Mathematics*, Vol.9, No.6, 16422–16435.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Muchammad Abrori, Deddy Rahmadi, Lailatul Ulla Safitri, Alvian Nur Rohman,
Jaqueline Widad Zuha

- [15] Mn, A. N. A., Hasmawati, & Nurwahyu, B., 2025. The edge metric dimension of comb product cycles versus stars and fans. *Journal of Advanced Research in Applied Sciences and Engineering Technology*, Vol.49, No.2, 52–63.
- [16] Peterin, I., & Yero, I. G., 2020. Edge metric dimension of some graph operations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Vol.43(2018), 2465–2477.
- [17] Prabhu, S., & Janany, T. J., 2026. Edge metric dimension of silicate networks. *Communications in Combinatorics and Optimization*, Vol.11, No.1, 287–296.
- [18] Pranata, P. Y., Kiftiah, M., & Fran, F., 2019. Jumlah bintang pada graf bunga matahari. *Bimester Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya*, Vol.8, No.3, 447–455.
- [19] Rahmadi, D., Robiultsani, M. F. N., & Abrori, M., 2025. On the edge metric dimension of helm and closed helm graph. *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. 14, No.3, 232–239.
- [20] Rajan, B., Rajasingh, I., & Venugopal, P., 2011. Metric dimension of uniform and quasi-uniform theta graphs. *Journal of Computational Mathematical Sciences*, Vol.2, No.1, 37–46.
- [21] Rinurwati, & Nabila, R. E., 2020. Metric and edge-metric dimensions of bobble-neighbourhood-corona graphs. *Journal of Physics: Conference Series.*, Vol. 1836(1), 1-9, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1836/1/012010>
- [22] Sharma, S. K., Raza, H., & Bhat, V. K., 2021. Computing edge metric dimension of one-pentagonal carbon nanocone. *Frontiers in Physics*, Vol.9(2021), <https://doi.org/10.3389/fphy.2021.749166>
- [23] Singh, P., Sharma, S., Sharma, S. K., & Bhat, V. K., 2021. Metric dimension and edge metric dimension of windmill graphs. *AIMS Mathematics*, Vol.6, No.9, 9138–9153.
- [24] Wei, M., Fan, B., Lu, C., Yue, J., & Liu, J., 2026. The edge metric dimensions of convex polytopes. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 378(2026), 294–306.
- [25] Welyyanti, D., Arsyad, A., & Yulianti, L. 2023. Dimensi metrik amalgamasi graf theta. *Journal of Mathematics and Its Applications*. Vol. 20, No.2, 241—253, <https://journal.its.ac.id/index.php/limits/article/view/5588>