

Analysis of Pneumonia Transmission Dynamics in Under-Five Children Using an SEITR Model with Awareness and Vaccination

Analisis Dinamika Penyebaran Pneumonia pada Balita Menggunakan Model SEITR dengan Faktor Kesadaran dan Vaksinasi

Santa Falare Sitanggang^{1*}, Tri Andri Hutapea²

^{1,2}Department of Mathematics, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia

Email: ¹santafs.4223230021@mhs.unimed.ac.id, ²triandrihutapea@unimed.ac.id

*Corresponding author

Received: 13 June 2026, revised: 24 August 2026, accepted: 30 August 2026

Abstract

Pneumonia remains one of the leading causes of mortality among children under five in Indonesia. This study investigates the transmission dynamics of pneumonia among the Indonesian under-five population using a compartmental SEITR (Susceptible–Exposed–Infected–Treated–Recovered) mathematical model incorporating caregiver awareness and vaccination. The study aims to analyze the equilibrium points and their stability, sensitivity of the model with respect to parameters affecting the basic reproduction number R_0 and model behavior under various intervention scenarios through numerical simulations. The analysis includes the determination of equilibrium points, derivation of the basic reproduction number, local asymptotic stability analysis using linearization and the Routh–Hurwitz criterion, and sensitivity analysis. The results show that under the parameter values representing the Indonesian population, $R_0 = 1.7083 > 1$, and the analysis establishes the existence and stability conditions of the disease-free and endemic equilibria. Under these conditions, the disease-free equilibrium is unstable, whereas the endemic equilibrium is locally asymptotically stable, indicating that pneumonia tends to persist in the population. Sensitivity analysis reveals that the effective contact rate β is the most influential parameter in increasing R_0 , whereas the vaccination rate v has the greatest negative sensitivity effect R_0 . Numerical simulations demonstrate that increasing caregiver awareness to $\omega = 0.6$ with the vaccination rate maintained at $v = 0.7$, reduces R_0 to 0.8542, whereas increasing the vaccination rate alone without enhancing awareness is insufficient to achieve a disease-free state under the simulated scenarios. These findings indicate that increasing caregiver awareness, combined with vaccination, is an effective strategy for reducing pneumonia transmission among children under five.

Keywords: Under-Five Pneumonia, Model SEITR, Awareness, Vaccination, Sensitivity Analysis



Abstrak

Pneumonia merupakan salah satu penyebab utama kematian pada balita di Indonesia. Penelitian ini mengkaji dinamika penyebaran pneumonia pada populasi balita Indonesia menggunakan model matematika kompartemen SEITR (Susceptible–Exposed–Infected–Treated–Recovered) dengan mempertimbangkan kesadaran pengasuh dan vaksinasi. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis titik kesetimbangan dan kestabilannya, sensitivitas model terhadap parameter yang memengaruhi bilangan reproduksi dasar R_0 , serta perilaku model pada berbagai skenario intervensi melalui simulasi numerik. Analisis meliputi penentuan titik kesetimbangan, perhitungan bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan asimtotik lokal menggunakan metode linearisasi dan kriteria Routh–Hurwitz, serta analisis sensitivitas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa berdasarkan parameter yang merepresentasikan kondisi populasi Indonesia diperoleh $R_0 = 1,7083 > 1$, serta diperoleh kondisi eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Pada kondisi tersebut, titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal, yang menunjukkan bahwa pneumonia cenderung bertahan dalam populasi. Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa laju kontak efektif β merupakan parameter yang paling berpengaruh dalam meningkatkan nilai R_0 sedangkan laju vaksinasi ν memberikan pengaruh negatif terbesar terhadap R_0 . Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa peningkatan kesadaran pengasuh hingga $\omega = 0,6$, dengan laju vaksinasi tetap pada $\nu = 0,7$, mampu menurunkan R_0 menjadi 0,8542, sedangkan peningkatan laju vaksinasi saja tanpa peningkatan kesadaran belum mampu mencapai kondisi bebas penyakit pada skenario yang disimulasikan. Hasil ini menunjukkan bahwa peningkatan kesadaran pengasuh yang dikombinasikan dengan vaksinasi merupakan strategi efektif dalam menekan penyebaran pneumonia pada balita.

Kata kunci: Pneumonia Balita, Model SEITR, Awareness, Vaksinasi, Analisis Sensitivitas

1. PENDAHULUAN

Pneumonia merupakan salah satu penyakit infeksi akut pada saluran pernapasan yang memiliki tingkat morbiditas dan mortalitas tinggi di berbagai negara. Berdasarkan World Health Organization, pneumonia umumnya ditandai dengan gejala batuk, demam, serta gangguan pernapasan yang mengindikasikan kerusakan jaringan paru-paru [26]. Secara global, pneumonia menjadi penyebab kematian terbesar kelima dengan total sekitar 2,18 juta kematian pada tahun 2021 [20]. Kelompok balita (anak usia di bawah lima tahun) merupakan populasi yang paling rentan terhadap pneumonia. Pneumonia termasuk salah satu faktor utama penyebab tingginya angka kesakitan dan kematian pada anak usia di bawah lima tahun, kelompok lanjut usia, serta individu dengan penyakit kronis atau sistem kekebalan tubuh yang rendah [23]. Pneumonia menjadi penyebab kematian tertinggi pada balita dengan kontribusi sekitar 36% dari seluruh penyebab kematian balita di dunia, melampaui penyakit campak, malaria, dan AIDS. Pada tahun 2023, jumlah kematian balita akibat pneumonia diperkirakan mencapai 700.000 kasus. Indonesia menempati posisi kedelapan dari 15 negara dengan tingkat kematian balita akibat pneumonia tertinggi di dunia [25].

Upaya pengendalian pneumonia di Indonesia telah dilakukan melalui vaksinasi *Pneumococcal Conjugate Vaccine* (PCV) yang diperluas secara nasional sejak 2022, program pengobatan, serta peningkatan kesadaran masyarakat melalui program MTBS dan promosi PHBS [13]. Meskipun demikian, penyebaran pneumonia masih tetap tinggi, mengindikasikan perlunya pemahaman mendalam mengenai pengaruh parameter intervensi terhadap dinamika penyebaran penyakit. Dalam konteks pengendalian penyakit menular, vaksinasi merupakan salah satu intervensi penting untuk mengurangi populasi yang rentan, sedangkan peningkatan awareness dapat mendorong perubahan perilaku yang berpotensi menurunkan risiko penularan. Agaba et al. [1] menunjukkan bahwa penyebaran awareness dapat memengaruhi dinamika penyakit dan kondisi kestabilan sistem epidemiologi. Selain itu, integrasi vaksinasi dan awareness dalam model epidemiologi juga telah menunjukkan bahwa kedua intervensi tersebut dapat memengaruhi dinamika serta kestabilan titik kesetimbangan [2].

Pemodelan matematika menjadi pendekatan yang efektif untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit menular dan mengidentifikasi parameter intervensi yang paling berpengaruh. Pemodelan matematika merupakan proses konstruksi representasi kuantitatif dari suatu sistem atau fenomena menggunakan konsep dan bahasa matematik [7]. Setelah proses konstruksi model dilakukan, analisis sensitivitas menjadi tahapan penting untuk menentukan parameter-parameter yang memberikan pengaruh paling besar terhadap dinamika penyebaran penyakit. Analisis sensitivitas merupakan teknik matematika untuk menilai pengaruh perubahan parameter terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0). Metode ini sesuai digunakan karena mampu mengidentifikasi parameter kunci yang paling berdampak dalam penurunan kasus dan penentuan prioritas intervensi secara optimal [13] serta telah terbukti efektif dalam pemodelan epidemiologi penyakit menular [16]. Dalam pemodelan pneumonia pada anak, analisis sensitivitas juga telah digunakan untuk mengidentifikasi parameter intervensi yang paling berpengaruh terhadap R_0 , sehingga dapat membantu menentukan strategi pengendalian yang lebih efektif [23].

Dalam bidang epidemiologi, model kompartemen berbasis sistem persamaan diferensial telah banyak digunakan. Beberapa penelitian sebelumnya telah mengkaji model matematika pneumonia, di antaranya membahas model SEIPR dengan imunisasi dan pengobatan [10], serta mengembangkan model SEIRS dengan kontrol optimal [9]. Darmawan dan Tasman mengembangkan model matematika penyebaran pneumonia dengan intervensi vaksinasi dan pengobatan serta menganalisis titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, kestabilan lokal, dan simulasi numerik [6]. Ngari mengembangkan model kompartemen pneumonia pada anak di bawah lima tahun dengan mempertimbangkan vaksinasi dan pengobatan. Analisis yang dilakukan meliputi titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, kestabilan, sensitivitas, dan simulasi numerik, yang menunjukkan pentingnya vaksinasi dan pengobatan dalam pengendalian pneumonia [17]. Penelitian yang lebih baru oleh Paramita et al. [21] juga mengembangkan model pneumonia pada anak di bawah lima tahun dengan mempertimbangkan vaksinasi, pengobatan, dan faktor nutrisi, serta melakukan analisis titik kesetimbangan, R_0 , kestabilan lokal, sensitivitas, dan simulasi numerik.

Di sisi lain, faktor awareness mulai mendapat perhatian dalam pengembangan model matematika pneumonia. Olopade et al. [19] mengembangkan model matematika transmisi pneumonia dengan mempertimbangkan awareness, sedangkan Oladejo et al. [18] mengembangkan model SEITR dengan faktor awareness. Jiru dan Kumaravel juga menganalisis model pneumonia dengan komponen awareness melalui analisis kestabilan dan sensitivitas. Hasil penelitian tersebut memperkuat pentingnya mempertimbangkan faktor awareness dalam menganalisis dinamika penyebaran pneumonia [11].

Meskipun demikian, penelitian terdahulu umumnya membahas vaksinasi dan awareness secara terpisah pada model pneumonia, atau mengintegrasikan kedua faktor tersebut pada model epidemiologi umum. Penelitian yang secara khusus mengintegrasikan faktor awareness pengasuh dan vaksinasi dalam model SEITR untuk menggambarkan dinamika pneumonia pada populasi balita di Indonesia, disertai analisis titik kesetimbangan, kestabilan asimtotik lokal, sensitivitas parameter, dan simulasi numerik berbagai skenario intervensi, masih terbatas.

Penelitian ini mengembangkan model SEITR [19] dengan penambahan parameter vaksinasi untuk mengakomodasi program PCV yang telah diimplementasikan di Indonesia. Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar R_0 guna memberikan rekomendasi intervensi yang lebih efektif dalam pengendalian pneumonia pada balita di Indonesia. Model tersebut mempertahankan faktor awareness yang memengaruhi laju penularan dan menambahkan vaksinasi sebagai intervensi untuk mengurangi proporsi individu yang masuk ke kelompok rentan. Selanjutnya, dilakukan analisis titik kesetimbangan dan kestabilan asimtotik lokal, perhitungan bilangan reproduksi dasar R_0 analisis sensitivitas, serta simulasi numerik dengan berbagai skenario awareness dan vaksinasi. Analisis tersebut dilakukan untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh terhadap bilangan

reproduksi dasar R_0 dan mengevaluasi kombinasi intervensi yang berpotensi mengarahkan sistem menuju kondisi bebas penyakit, sehingga dapat memberikan gambaran mengenai strategi pengendalian pneumonia pada balita di Indonesia.

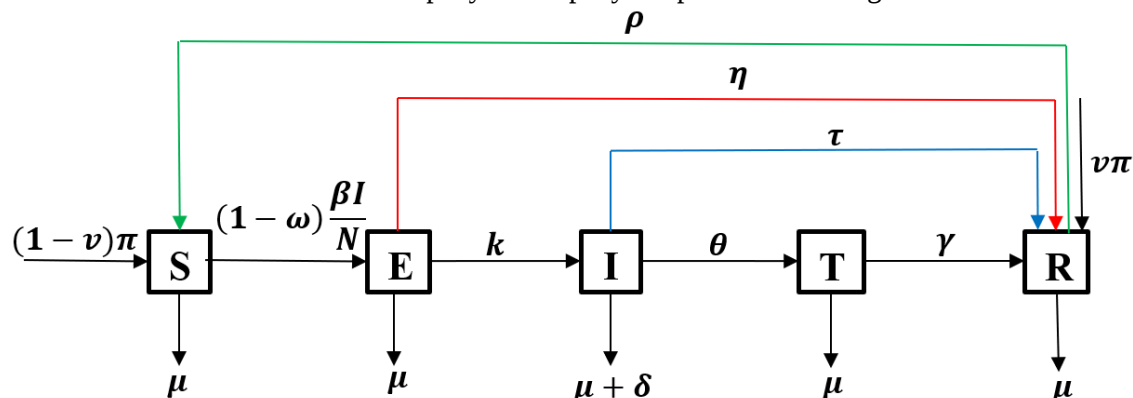
2. MODEL MATEMATIKA

Model pada penelitian ini membagi populasi balita ke dalam lima kompartemen utama yang saling berinteraksi secara dinamis, yaitu S (*Susceptible*) untuk kelompok individu rentan yang belum terinfeksi namun berisiko tertular, E (*Exposed*) menyatakan kelompok individu yang telah terpapar tetapi belum menunjukkan gejala serta belum mampu menularkan penyakit, I (*Infected*) merupakan kelompok individu yang mengalami infeksi aktif, menunjukkan gejala, dan dapat menyebarkan penyakit melalui droplet pernapasan, sedangkan T (*Treated*) menunjukkan kelompok individu yang sedang menjalani proses pengobatan, dan R (*Recovered*) untuk kelompok yang telah sembuh dan memiliki imunitas sementara. Pengembangan utama dalam penelitian ini adalah penambahan parameter vaksinasi sebagai strategi intervensi tambahan di samping parameter kesadaran (*awareness*) yang telah ada dalam model [14]. Penambahan parameter vaksinasi ini secara langsung mengurangi laju masuknya individu ke kompartemen rentan, yang pada akhirnya menekan laju transmisi penyakit dalam populasi.

Adapun asumsi-asumsi dalam membentuk model SEITR ini adalah sebagai berikut:

- Individu baru masuk ke dalam populasi melalui kelahiran dengan laju rekrutmen π . Dari total kelahiran tersebut, proporsi sebesar v langsung mendapatkan vaksinasi dan masuk ke kompartemen R, sedangkan proporsi $(1 - v)$ masuk ke kompartemen rentan (S).
- Setiap kompartemen mengalami laju kematian alami yaitu μ .
- Individu rentan (S) dapat mengalami infeksi akibat kontak dengan individu yang terinfeksi (I) dengan laju transmisi yang mengikuti fungsi mass action incidence, di mana laju kontak efektif dimodifikasi oleh faktor *awareness* (ω) yang mencerminkan kondisi lingkungan sosial di sekitar populasi balita.
- Individu terinfeksi dapat mengalami kematian karena infeksi penyakit dengan laju δ .
- Individu yang sembuh dapat menjadi rentan kembali karena kekebalan tubuh terhadap penyakit menurun.
- Tidak terdapat imigrasi maupun emigrasi dalam populasi. Populasi bersifat tertutup, sehingga perubahan populasi hanya terjadi akibat rekrutmen baru (π) dan kematian (μ, δ). Seluruh individu dalam populasi diasumsikan homogen dalam hal karakteristik biologis dan demografis, artinya memiliki perilaku yang sama terhadap proses penularan

Skema dari model matematika SEITR penyebaran penyakit pneumonia sebagai berikut:



Gambar 2.1 Skema model SEITR penyakit pneumonia

Berdasarkan Gambar 2.1, diperoleh sistem persamaan model matematika sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= (1-v)\pi - (1-\omega)\frac{\beta I}{N}S - \mu S + \rho R \\
 \frac{dE}{dt} &= (1-\omega)\frac{\beta I}{N}S - (k + \eta + \mu)E \\
 \frac{dI}{dt} &= kE - (\delta + \tau + \theta + \mu)I \\
 \frac{dT}{dt} &= \theta I - (\gamma + \mu)T \\
 \frac{dR}{dt} &= v\pi + \eta E + \tau I + \gamma T - (\mu + \rho)R
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definisi parameter yang digunakan dalam model matematika *SEITR* pada dinamika penyebaran penyakit pneumonia ditunjukkan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 2.1 Definisi parameter pada Model SEITR

Parameter	Keterangan	Syarat
π	Laju kelahiran	$\pi \geq 0$
μ	Laju kematian alami	$\mu \geq 0$
β	Laju kontak efektif antar individu	$\beta \geq 0$
ω	Tingkat kesadaran pengasuh/orang tua terhadap risiko penularan pneumonia pada balita yang memengaruhi laju kontak efektif	$0 \leq \omega \leq 1$
k	Laju perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi	$k \geq 0$
θ	Laju individu terinfeksi yang mendapatkan pengobatan	$\theta \geq 0$
γ	Laju kesembuhan individu yang menerima pengobatan	$\gamma \geq 0$
η	Laju kesembuhan alami bagi individu terpapar	$\eta \geq 0$
τ	Laju kesembuhan alami bagi individu terinfeksi	$\tau \geq 0$
ρ	Laju hilangnya kekebalan sehingga individu kembali rentan	$\rho \geq 0$
v	Proporsi cakupan vaksinasi pada bayi baru lahir	$0 \leq v \leq 1$
δ	Laju kematian akibat penyakit atau infeksi	$\delta \geq 0$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Titik Ekuilibrium

Titik (S, E, I, T, R) merupakan titik Ekuilibrium dari Sistem (2.1) jika memenuhi syarat $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dT}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ [24].

1. Titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 diperoleh ketika $E^* = I^* = T^* = 0$, sehingga:

$$E_0 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*) = \left(\frac{\pi(\mu + \rho - v\mu)}{\mu(\mu + \rho)}, 0, 0, 0, \frac{v\pi}{\mu + \rho} \right) \tag{3.1}$$

2. Titik ekuilibrium endemik $E_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$ ada ketika seluruh komponen bernilai positif, yang terjadi saat $R_0 > 1$. Dengan demikian, diperoleh titik ekuilibrium endemik atau tidak bebas penyakit sebagai berikut:

$$E_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*) \text{ dengan}$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI
Santa Falare Sitanggang, Tri Andri Hutapea

$$S^* = \frac{N^*(k+\eta+\mu)(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k\beta(1-\omega)} \quad (3.2)$$

$$E^* = \frac{(\delta+\tau+\theta+\mu)I^*}{k} \quad (3.3)$$

$$I^* = \frac{\frac{\mu N^*(k+\eta+\mu)(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k\beta(1-\omega)} - \pi \left[(1-v) + \frac{\rho v}{\mu+\rho} \right]}{-\frac{(k+\eta+\mu)(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k} + \frac{\rho}{\mu+\rho} \left(\frac{\eta(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k} + \tau + \frac{\gamma\theta}{\gamma+\mu} \right)} \quad (3.4)$$

$$T^* = \frac{\theta I^*}{(\gamma+\mu)} \quad (3.5)$$

$$R^* = \frac{1}{(\mu+\rho)} \left(v\pi + \left[\frac{\eta(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k} + \tau + \frac{\gamma\theta}{(\gamma+\mu)} \right] I^* \right) \quad (3.6)$$

3.2 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Nilai R_0 didefinisikan sebagai nilai harapan jumlah individu rentan yang terinfeksi akibat kontak dengan satu individu terinfeksi [22]. *Basic Reproduction Number* adalah rata-rata jumlah kasus sekunder yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi dalam populasi yang masih rentan terhadap penyakit. Nilai R_0 dapat diperoleh melalui nilai eigen matriks Jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit maupun endemik. Perhitungannya umumnya menggunakan pendekatan *Next Generation Matrix* (NGM) [4].

Bilangan reproduksi dasar ditentukan menggunakan persamaan $\frac{dE}{dt}$ dan $\frac{dI}{dt}$, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= (1-\omega) \frac{\beta I}{N} S - (k+\eta+\mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= kE - (\delta+\tau+\theta+\mu)I \end{aligned} \quad (3.7)$$

Matriks F dan V diperoleh dari turunan parsial F_i dan V_i terhadap E dan I :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & (1-\omega) \frac{\beta S}{N} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} (k+\eta+\mu) & 0 \\ -k & (\delta+\tau+\theta+\mu) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Kedua matriks tersebut kemudian dievaluasi pada titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 pada Persamaan (3.1) sehingga diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} 0 & (1-\omega)\beta \left(\frac{(\mu+\rho-v\mu)}{(\mu+\rho)} \right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} (k+\eta+\mu) & 0 \\ -k & (\delta+\tau+\theta+\mu) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari $R_0 = \rho(K) = \det[K - \lambda I] = 0$ di mana $K = FV^{-1}$. Karena R_0 adalah nilai eigen terbesar, maka bilangan reproduksi dasar dari model dinamika pneumonia dengan faktor *awareness* dan vaksinasi adalah:

$$R_0 = \frac{(1-\omega)\beta k(\mu+\rho-v\mu)}{(k+\eta+\mu)(\delta+\tau+\theta+\mu)(\mu+\rho)} \quad (3.10)$$

Jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik sehingga penyakit tidak dapat menyebar dan pada akhirnya akan menghilang dari populasi. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit menjadi tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik, yang menunjukkan bahwa penyakit akan terus bertahan dalam populasi [3].

3.3 Analisis Kestabilan Model

Sistem (2.1) merupakan sistem nonlinier [8], sehingga analisis kestabilannya ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui proses linearisasi [15] pada model SEITR penyebaran penyakit pneumonia. Matriks Jacobian untuk model dinamika penyebaran penyakit pneumonia sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -(1-\omega)\frac{\beta I}{N} - \mu & 0 & -(1-\omega)\frac{\beta S}{N} & 0 & \rho \\ (1-\omega)\frac{\beta I}{N} & -(k+\eta+\mu) & (1-\omega)\frac{\beta S}{N} & 0 & 0 \\ 0 & k & -(\delta+\tau+\theta+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(\gamma+\mu) & 0 \\ 0 & \eta & \tau & \gamma & -(\mu+\rho) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.3.1 Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 dianalisis dengan mensubstitusikan titik $E_0 = (\frac{\pi(\mu+\rho-v\mu)}{\mu(\mu+\rho)}, 0, 0, 0, \frac{v\pi}{\mu+\rho})$, ke dalam matriks Jacobian pada Persamaan (3.11) sehingga diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -(1-\omega)\frac{\beta S^*}{N} & 0 & \rho \\ 0 & -(k+\eta+\mu) & (1-\omega)\frac{\beta S^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & k & -(\delta+\tau+\theta+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(\gamma+\mu) & 0 \\ 0 & \eta & \tau & \gamma & -(\mu+\rho) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$. Diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$(-\mu - \lambda) \cdot (-(\mu + \rho) - \lambda) \cdot (-C - \lambda) \cdot [\lambda^2 + (A + B)\lambda + AB(1 - R_0)] = 0 \quad (3.13)$$

Dari persamaan karakteristik tersebut, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -(\mu + \rho)$, $\lambda_3 = -(\gamma + \mu)$ dan dua nilai eigen lainnya merupakan akar dari polinom kuadrat $\lambda^2 + (A + B)\lambda + AB(1 - R_0) = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar dari persamaan tersebut akan memiliki bagian real negatif apabila seluruh koefisien polinomial bernilai positif [14]. Koefisien dari λ^1 adalah $(A + B) > 0$ karena A dan B merupakan kombinasi parameter yang bernilai positif. Koefisien dari λ^0 adalah $AB(1 - R_0)$, yang bernilai positif apabila $R_0 < 1$. Dengan demikian, apabila $R_0 < 1$, maka seluruh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bernilai negatif dan kedua akar pada Persamaan (3.13) mempunyai bagian real negatif.

3.3.2 Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Matriks Jacobian pada persamaan (3.1) disubstitusi dengan titik ekuilibrium endemik penyebaran penyakit pneumonia $E_1 = (\frac{N^*(k+\eta+\mu)(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k\beta(1-\omega)}, \frac{(\delta+\tau+\theta+\mu)I^*}{k}, =$

$\frac{\mu N^*(k+\eta+\mu)(\delta+\tau+\theta+\mu) - \pi[(1-\nu) + \frac{\rho\nu}{\mu+\rho}]}{\frac{(k+\eta+\mu)(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k} + \frac{\rho}{\mu+\rho}(\frac{\eta(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k} + \tau + \frac{\gamma\theta}{\gamma+\mu})}, \frac{\theta I^*}{(\gamma+\mu)}, \frac{1}{(\mu+\rho)} \left(\nu\pi + \left[\frac{\eta(\delta+\tau+\theta+\mu)}{k} + \tau + \frac{\gamma\theta}{\gamma+\mu} \right] I^* \right)$. Pada titik kesetimbangan endemik berlaku $I = I^* \neq 0$, sehingga matriks Jacobian di E_1 adalah:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{(1-\omega)\beta I^*}{N} - \mu & 0 & -\frac{(1-\omega)\beta S^*}{N} & 0 & \rho \\ \frac{(1-\omega)\beta I^*}{N} & -B & \frac{(1-\omega)\beta S^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & k & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -C & 0 \\ 0 & \eta & \tau & \gamma & -(\mu + \rho) \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobian di E_1 dapat ditulis sebagai:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -p - \mu & 0 & -q & 0 & \rho \\ p & -B & q & 0 & 0 \\ 0 & k & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -C & 0 \\ 0 & \eta & \tau & \gamma & -(\mu + \rho) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Di mana $p = \frac{(1-\omega)\beta I^*}{N}$, $q = \frac{(1-\omega)\beta S^*}{N}$.

Nilai eigen dari $J(E_1)$ diperoleh dari persamaan karakteristik $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$. Persamaan karakteristik dari $J(E_1)$ membentuk polinomial berderajat lima:

$$P(\lambda) = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0 \quad (3.16)$$

dengan koefisien-koefisien yang diperoleh dari ekspansi sebagai berikut:

$$a_5 = C(\mu + \rho)(p + \mu)(AB - kq) - \rho p C(k\tau + \eta A) - \rho p k \gamma \theta$$

$$a_4 = C(\mu + \rho)(p + \mu)(A + B) + [C(p + \mu) + (C + \mu + \rho)(p + \mu)](AB - qk) - \rho p (C\eta + k\tau + \eta A) - q p k (C + \rho)$$

$$a_3 = C(\mu + \rho)(p + \mu) + [C(\mu + \rho) + (C + \mu + \rho)(p + \mu)](A + B) + (C + p + 2\mu + \rho)(AB - qk) - \rho p \eta + q p k (C + \rho + \mu)$$

$$a_2 = C(\mu + \rho) + (C + \mu + \rho)(p + \mu) + (C + p + 2\mu + \rho)(A + B) + (AB - qk) + q p k$$

$$a_1 = A + B + C + p + 2\mu + \rho$$

Titik ekuilibrium endemik (E_1) dikatakan stabil apabila semua nilai eigen dari matriks Jacobian ($J(E_1)$) mempunyai bagian real negatif. Penentuan tanda nilai eigen dari Persamaan (3.16) dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh–Hurwitz. Berdasarkan kriteria tersebut, akar-akar persamaan karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ akan mempunyai bagian real negatif jika memenuhi syarat $a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5 > 0, (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 a_1 a_5)(a_1 a_4 - a_5) - a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 > 0$ dan $a_5 > 0$. Jika seluruh kondisi ini dipenuhi, maka semua nilai eigen dari ($J(E_1)$) memiliki bagian real negatif sehingga titik ekuilibrium endemik (E_1) bersifat stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, apabila salah satu syarat Routh–Hurwitz tidak terpenuhi, maka paling tidak terdapat satu nilai eigen dengan bagian real positif, sehingga titik kesetimbangan endemik (E_1) menjadi tidak stabil [12].

3.4 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan melalui perhitungan indeks sensitivitas ternormalisasi R_0 terhadap masing-masing parameter model menggunakan persamaan $\gamma_p^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial p} \times \frac{p}{R_0}$ [5]. Indeks sensitivitas ternormalisasi dihitung untuk setiap parameter yang mempengaruhi R_0 . Hasil perhitungan disajikan dalam Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1 Indeks Sensitivitas parameter terhadap R_0 .

Parameter	Indeks Sensitivitas
β	+1
ω	$-\frac{\omega}{1-\omega}$
k	$\frac{\eta+\mu}{k+\eta+\mu}$
v	$-\frac{v\mu}{\mu+\rho-v\mu}$
η	$-\frac{\eta}{k+\eta+\mu}$
δ	$-\frac{\delta}{\delta+\tau+\theta+\mu}$
τ	$-\frac{\tau}{\delta+\tau+\theta+\mu}$
θ	$-\frac{\theta}{\delta+\tau+\theta+\mu}$
μ	$\frac{\mu(1-v)}{\mu+\rho-v\mu} - \frac{\mu}{A} - \frac{\mu}{B} - \frac{\mu}{\mu+\rho}$
ρ	$\frac{v\mu\rho}{(\mu+\rho-v\mu)(\mu+\rho)}$

Parameter-parameter yang digunakan dalam proses perhitungan tersebut disajikan pada tabel berikut.

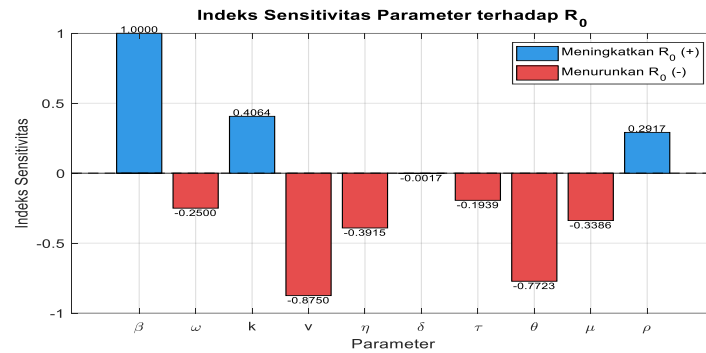
Tabel 3.2 Nilai Parameter Model Dinamika Penyebaran Pneumonia

Parameter	Nilai	Sumber
π	0,0023	[14]
μ	0,0019	[14]
β	0,4	[19]
ω	0,2	Asumsi
k	0,0758	[10]
θ	0,0458	[10]
γ	0,053	[10]
η	0,05	[19]
τ	0.0115	[3]
ρ	0.00095	[3]
v	0,7	[14]
δ	0,0001	[14]

Nilai-nilai parameter tersebut disubsitiskan ke dalam masing-masing rumus indeks sensitivitas pada Tabel 3.1 sehingga diperoleh nilai numerik sebagai berikut.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI

Santa Falare Sitanggang, Tri Andri Hutapea



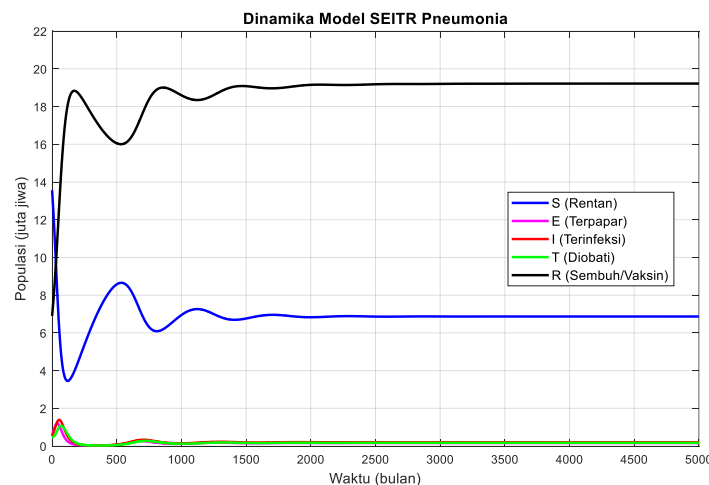
Gambar 3.1 Indeks Sensitivitas Parameter terhadap R_0

Berdasarkan hasil perhitungan indeks sensitivitas setiap parameter terhadap bilangan reproduksi dasar R_0 diperoleh informasi mengenai seberapa besar pengaruh masing-masing parameter terhadap penyebaran penyakit pneumonia pada balita. Parameter β memiliki indeks sensitivitas sebesar +1, yang berarti setiap peningkatan laju kontak efektif sebesar 1% akan meningkatkan R_0 sebesar 1% secara proporsional. Hal tersebut menunjukkan bahwa β merupakan parameter yang paling berpengaruh dalam meningkatkan penyebaran penyakit pneumonia. Oleh sebab itu, diperlukan upaya untuk mengurangi kontak langsung antara individu rentan dan individu yang terinfeksi, misalnya melalui peningkatan higienitas lingkungan dan penerapan protokol kesehatan, menjadi langkah yang sangat krusial.

3.5 Simulasi Numerik

Penyelesaian simulasi numerik dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Kondisi awal yang digunakan berdasarkan data proyeksi BPS dan Kementerian Kesehatan RI tahun 2024 dengan total populasi balita $N = 22.000.000$ jiwa, yaitu $S(0) = 13.565.000$, $E(0) = 528.000$, $I(0) = 527.000$, $T(0) = 480.000$, dan $R(0) = 6.900.000$ dengan nilai parameter pada Tabel 3.2. Diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar sebesar 1,708332. Nilai $R_0 > 1$ mengindikasikan adanya titik ekuilibrium endemik di dalam model. Titik kesetimbangan endemik diperoleh sebagai $E_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*) = (6.868.297, 3285; 159.654, 3877; 204.077, 6154; 170.250, 5425; 19.218.558, 1461)$.

Hasil simulasi dinamika penyebaran penyakit pneumonia dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut.



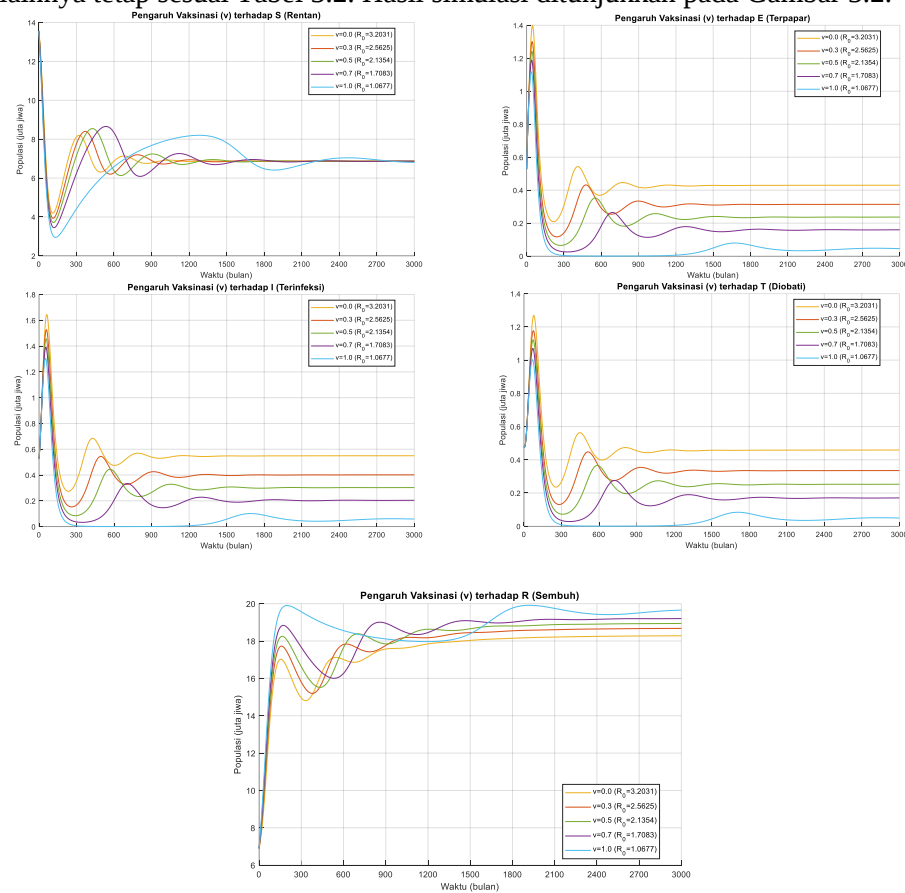
Gambar 3.2 Grafik Dinamika Penyebaran Penyakit Pneumonia

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI

Santa Falare Sitanggang, Tri Andri Hutapea

Berdasarkan Gambar 3.2, seluruh kompartemen pada model SEITR menunjukkan pola osilasi teredam yang secara bertahap menuju titik kesetimbangan endemik (E_1). Kompartemen S (Rentan) mengalami penurunan tajam pada awal simulasi, kemudian berfluktuasi dengan amplitudo yang semakin kecil hingga stabil. Kompartemen E (Terpapar) sempat meningkat sedikit di awal, lalu menurun dan mencapai kondisi stabil lebih cepat dibanding kompartemen lainnya. Kompartemen I (Terinfeksi) meningkat hingga mencapai puncak pada awal simulasi, kemudian menurun dan berangsur menuju keadaan stabil. Kompartemen T (Diobati) mengalami peningkatan akibat proses pengobatan, lalu menurun dan mencapai kestabilan setelah terjadi fluktuasi kecil. Sementara itu, kompartemen R (Sembuh) meningkat secara signifikan pada awal simulasi, kemudian mengalami osilasi ringan sebelum mencapai nilai konstan. Secara keseluruhan, seluruh kompartemen konvergen menuju titik kesetimbangan endemik pada rentang waktu sekitar bulan ke-1000 hingga 2000, yang menunjukkan bahwa penyakit tetap bertahan dalam populasi meskipun telah dilakukan upaya pengendalian melalui vaksinasi dan pengobatan.

Tahap selanjutnya adalah melakukan simulasi numerik dengan memvariasikan parameter vaksinasi untuk menganalisis pengaruh tingkat cakupan vaksinasi terhadap dinamika kompartemen dalam model SEITR. Nilai v diuji pada beberapa skenario, yaitu 0; 0,2; 0,5; 0,7; dan 1,0, sementara parameter lainnya tetap sesuai Tabel 3.2. Hasil simulasi ditunjukkan pada Gambar 3.2.



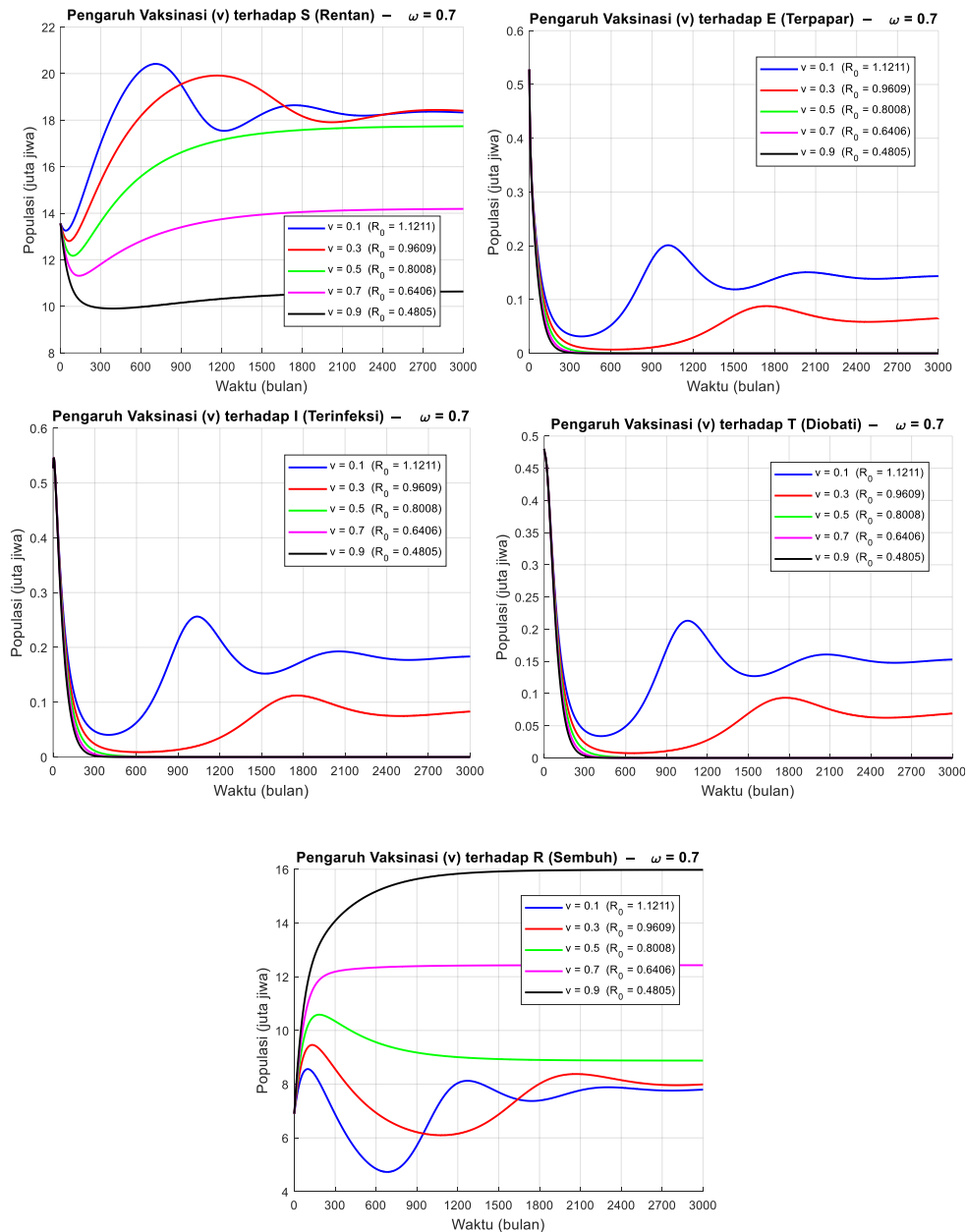
Gambar 3.3 Grafik Dinamika Populasi Model SEITR dengan Variasi Parameter v

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa peningkatan cakupan vaksinasi memengaruhi dinamika populasi pada model SEITR. Pada kompartemen S seluruh skenario memiliki pola yang serupa dan konvergen menuju keseimbangan yang sama, tetapi dengan kecepatan stabilisasi yang berbeda. Pada

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI

Santa Falare Sitanggang, Tri Andri Hutapea

kompartemen E dan I, semakin tinggi nilai v , semakin rendah puncak populasi terpapar dan terinfeksi. Meskipun demikian, pada skenario $v = 1,0$ nilai $R_0 = 1,0677$, sehingga penyakit masih bersifat endemik. Pada kompartemen T, peningkatan vaksinasi juga menurunkan jumlah individu yang memerlukan pengobatan. Sementara itu, pada kompartemen R, semakin tinggi cakupan vaksinasi maka semakin besar populasi yang berada pada kompartemen tersebut dalam jangka panjang. Secara keseluruhan, vaksinasi efektif menekan jumlah kasus dan kebutuhan pengobatan, namun belum mampu mengarahkan sistem menuju ekuilibrium bebas penyakit karena seluruh nilai R_0 masih lebih besar dari 1. Oleh karena itu, vaksinasi perlu dikombinasikan dengan peningkatan kesadaran pengasuh agar pengendalian pneumonia pada balita menjadi lebih efektif. Berikut disajikan grafik hasil simulasi perubahan nilai ω dan v .



Gambar 3.4 Grafik Dinamika Penyebaran Pneumonia saat $\omega = 0,7$ dan $v = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$

Pada tingkat kesadaran pengasuh $\omega = 0,7$, laju penularan efektif menurun menjadi 0,12, sehingga ketika $\nu = 0,3$ diperoleh $R_0 < 1$. Kondisi ini menunjukkan bahwa setiap individu terinfeksi menularkan penyakit kepada kurang dari satu individu lain, sehingga penyebaran pneumonia dapat dikendalikan dan populasi secara bertahap menuju kondisi bebas penyakit.

4. KESIMPULAN

Model SEITR yang mengintegrasikan faktor *awareness* dan vaksinasi memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu bebas penyakit dan endemik. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik bebas penyakit stabil ketika $R_0 < 1$, sedangkan titik endemik stabil ketika $R_0 > 1$. Berdasarkan parameter yang merepresentasikan kondisi Indonesia, diperoleh $R_0 = 1,7083$, yang mengindikasikan bahwa pneumonia pada balita masih bersifat endemik. Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa laju kontak efektif (β) merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap R_0 , sementara vaksinasi (ν) dan *awareness* (ω) berkontribusi dalam menurunkan nilai R_0 . Simulasi numerik menunjukkan bahwa peningkatan *awareness* merupakan intervensi paling efektif dalam mengendalikan penyebaran pneumonia dan dapat menurunkan R_0 hingga di bawah satu. Vaksinasi juga berperan penting, namun efektivitasnya meningkat apabila dikombinasikan dengan tingkat kesadaran yang tinggi. Secara keseluruhan, sinergi antara peningkatan kesadaran pengasuh balita, vaksinasi, dan pengurangan kontak efektif diperlukan untuk mencapai kondisi bebas penyakit pada populasi balita di Indonesia.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare that there is no conflict of interest.

REFERENCES

- [1] Agaba, G. O., Kyrychko, Y. N., & Blyuss, K. B. (2017). Mathematical model for the impact of awareness on the dynamics of infectious diseases. *Mathematical Biosciences*, 286, 22–30. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2017.01.009>
- [2] Agaba, G. O., Kyrychko, Y. N., & Blyuss, K. B. (2017). Dynamics of vaccination in a time-delayed epidemic model with awareness. *Mathematical Biosciences*, 294, 92–99. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2017.09.007>
- [3] Almutairi, N., & El-Shahed, M., 2025. Optimal Control Strategies for a Mathematical Model of Pneumonia Infection. *Computation*, Vol. 13, No. 9, <https://doi.org/10.3390/computation13090204>
- [4] ÇETİN, İ., AYDIN, M., & BİLGİÇ, Ş., 2024. Review of Mathematical Modeling Research: A Descriptive Content Analysis Study. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, Vol. 17, No. 2, 994–1025. <https://doi.org/10.17522/balikesirnef.1321365>
- [5] Chitnis, N., Hyman, J. M., & Cushing, J. M., 2008. Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model. *Bulletin of mathematical biology*, Vol. 70, No. 5, 1272–1296. <https://doi.org/10.1007/s11538-008-9299-0>
- [6] Darmawan, N. C., & Tasman, H. (2022). Model matematika penyebaran penyakit pneumonia dengan intervensi vaksinasi dan pengobatan. *Jurnal Matematika Integratif*, 18(1), 63–72. <https://doi.org/10.24198/jmi.v18.n1.36064.63-72>
- [7] Diekmann, O., & Heesterbeek, J. A. P., 2000. *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation*. John Wiley & Sons.

- [8] Finizio, N., & Ladas, G., 1982. *An Introduction To Differential Equations With Difference Equations Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company.
- [9] Firdaus, H. 'Alina, Aisyah, R. R., Anggriani, N., & Sylviani, S., 2024. Kontrol Optimal Intervensi dalam Model Matematika SEIRS Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita. *Jurnal Matematika Integratif*, Vol. 20, No. 1, 89–99. <https://doi.org/10.24198/jmi.v20.n1.54561.89-99>
- [10] Imran, R. S., Resmawan, R., Achmad, N., & Nuha, A. R., 2020. SEIPR-Mathematical Model of the Pneumonia Spreading in Toddlers with Immunization and Treatment Effects. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, Vol. 17, No. 2, 202–218. <https://doi.org/10.20956/jmsk.v17i2.11166>
- [11] Jiru, M. T., & Kumaravel, S. K. (2026). Stability and sensitivity analysis of a pneumonia model with awareness component using differential equations. *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, 2026, Article 5. <https://doi.org/10.1186/s13663-025-00815-3>
- [12] Kaya, K., & Ekawati, D., 2021. Model Matematika pada Penyakit Diabetes Melitus dengan Faktor Genetik dan Faktor Sosial. *JOMTA Journal of Mathematics: Theory and Applications*, Vol. 3, No. 1.
- [13] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia., 2023. *Rencana Aksi Nasional Penanggulangan Pneumonia dan Diare 2023–2030*. Direktorat Jenderal Pencegahan dan Pengendalian Penyakit, Jakarta.
- [14] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia., 2025. *Profil Kesehatan Indonesia Tahun 2024*. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.
- [15] Ledder, G., 2013. Mathematics for the life sciences. *Calculus, Modeling, Probability, and Dynamical Systems Springer Science+ Business Media*.
- [16] Lu, X., & Borgonovo, E., 2023. Global sensitivity analysis in epidemiological modeling. *European Journal of Operational Research*, Vol. 304, No. 1, 9–24. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.11.018>
- [17] Ngari, C. G. (2018). Modelling vaccination and treatment of childhood pneumonia and their implications. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 28(1), 1–24. <https://doi.org/10.9734/JAMCS/2018/41772>
- [18] Oladejo, Janet. K., Olopade, I. A., Akinola, E. . I., Ajao, S. O., & Akinsola, V. O., 2025. MATHEMATICAL TRANSMISSION OF SEITR EPIDEMIC MODEL IN THE PRESENCE OF AWARENESS. *Suranaree Journal of Science and Technology*, Vol. 31, No. 6, 030244(1-11). <https://doi.org/10.55766/sujst-2024-06-e05186>
- [19] Olopade, I. A., Akinola, E. I., Philemon, M. E., Mohammed, I. T., Ajao, S. O., Sangoniyi, S. O., & Adeniran, G. A., 2024. Modeling the Mathematical Transmission of a Pneumonia Epidemic Model with Awareness. *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*, Vol. 28, No. 2, 403–413. <https://doi.org/10.4314/jasem.v28i2.11>
- [20] Our World in Data., 2024. *Deaths from pneumonia*. Available at: <https://ourworldindata.org/grapher/deaths-from-pneumonia> (Accessed: 17 March 2026).
- [21] Paramita, A. Q. P., Herdiana, R., & Hariyanto, S. (2025). A dynamical model of pneumonia transmission in children under five years with nutritional factors. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 2025, Article 128. <https://doi.org/10.28919/cmbn/9550>
- [22] Sitinjak, N., & Hutapea, T. A., 2023. Stability Analysis of Mathematical Models of Toxoplasmosis Spread in Cat and Human Populations with Time Delay. *Formosa Journal of Science and Technology*, Vol. 2, No. 2, 433–452. <https://doi.org/10.55927/fjst.v2i2.2855>

- [23] Torres, A., Cilloniz, C., Niederman, M. S., Menéndez, R., Chalmers, J. D., Wunderink, R. G., & van der Poll, T., 2021. Pneumonia. *Nature Reviews Disease Primers*, Vol. 7, No. 1, Article 25. <https://doi.org/10.1038/s41572-021-00259-0>
- [24] Wiggins, S., 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer.
- [25] World Health Organization., 2022. *Pneumonia in children*. Available at: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/pneumonia-in-children> (Accessed: 17 March 2026).
- [26] World Health Organization., 2023. *Pneumonia*. Available at: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/pneumonia> (Accessed: 17 March 2026).