

Hopf Bifurcation in an S–I–P Dynamic Model with Disease in the Prey Population and Holling Type III Functional Response

Bifurkasi Hopf pada Model Dinamik S-I-P dengan Penyakit pada Populasi Prey dan Fungsi Respon Holling Tipe III

Gesti Essa Waldhani^{1*}

¹Department of Information Technology, Univeritas Bina Sarana Informatika, Jakarta, Indonesia

Email: gesti.gew@bsi.ac.id

Received: 2 July 2026, revised: 30 August 2026, accepted: 1 September 2026

Abstract

In this paper, a dynamic S-I-P model with disease in the prey population and Holling type III functional response with time-delay were discussed. Model analysis is carried out by determining fixed points, then analyzing the stability of the fixed points and discussing the existence of the Hopf bifurcation. Another modification given to the model is the use of time delays. Delay time is the time needed for a disease to make prey sick (incubation time). The first case is a model without time delay, it is obtained that 3 fixed points are unstable and 2 fixed points are stable. One of them is the interior fixed point tested with the Routh-Hurwitz criteria. The second case is a model with a delay time, the critical delay value is obtained. Hopf bifurcation occurs when the delay time value is equal to the critical delay value and also fulfills the transversality condition. Observations on the model simulation are carried out by varying the value of the delay time. When the Hopf bifurcation occurs, the graph on the solution plane shows a constant oscillatory movement. If the value of the delay time given is less than the critical value of the delay, the system solution goes to a balanced state. Then when the delay time value is greater than the critical delay value, the system solution continues to fluctuate causing an unstable system condition.

Keywords: Hopf bifurcation; S-I-P model; Holling type III; Disease.

Abstrak

Pada penelitian ini, model dinamik S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey* dan fungsi respon Holling type III dengan waktu tunda dibahas. Analisis model dilakukan dengan menentukan titik tetap dan membahas keberadaan bifurkasi Hopf. Modifikasi lain yang diberikan pada model adalah penggunaan waktu tunda. Waktu tunda merupakan waktu yang dibutuhkan bagi suatu penyakit untuk menyebabkan *prey* sakit (waktu inkubasi). Kasus pertama adalah model tanpa waktu tunda, diperoleh 3 titik tetap tidak stabil dan 2 titik tetap stabil. Salah satunya adalah titik tetap interior dengan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Kasus kedua adalah model dengan waktu tunda diperoleh nilai kritis tundaan. Bifurkasi hopf terjadi ketika nilai waktu tunda sama dengan nilai tundaan kritis dan juga memenuhi kondisi transversalitas. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan memvariasikan nilai waktu tunda. Saat bifurkasi Hopf terjadi, grafik pada bidang solusi memperlihatkan pergerakan osilasi yang konstan. Apabila nilai waktu tunda yang diberikan kurang dari nilai kritis tundaan, solusi sistem menuju kondisi yang seimbang. Kemudian ketika nilai



waktu tunda lebih besar dari nilai kritis tundaan, solusi sistem terus berfluktuasi sehingga menyebabkan kondisi sistem yang tidak stabil.

Kata kunci: Bifurkasi Hopf; Model S-I-P; Holling tipe III; Penyakit.

1. PENDAHULUAN

Model *predator-prey* merupakan salah satu model fundamental dalam ekologi matematika yang digunakan untuk menjelaskan interaksi antara populasi predator dan *prey*. Sejak diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra, berbagai pengembangan model telah dilakukan untuk menggambarkan kondisi biologis yang lebih realistis, seperti adanya keterbatasan sumber daya, penyebaran penyakit, perilaku pemangsaan nonlinier, dan pengaruh waktu tunda. Pengembangan tersebut diperlukan karena asumsi sederhana pada model klasik sering kali belum mampu menjelaskan fenomena kompleks yang terjadi pada ekosistem nyata.[9]

Dalam beberapa dekade terakhir, perhatian peneliti mulai diarahkan pada model eco-epidemiologi, yaitu model yang menggabungkan dinamika penyakit dengan interaksi predator-*prey*. Keberadaan penyakit pada populasi *prey* dapat mengubah struktur populasi dan memengaruhi mekanisme pemangsaan. Kajian komprehensif yang dilakukan oleh Morales dan Mena-Lorca[8] menunjukkan bahwa penyakit pada salah satu spesies dapat mengubah kestabilan sistem, memunculkan dinamika kompleks, dan menghasilkan berbagai perilaku asimtotik yang tidak ditemukan pada model *predator-prey* klasik.

Selain keberadaan penyakit, fungsi respon predator merupakan faktor penting yang menentukan dinamika sistem. Sebagian besar penelitian terdahulu menggunakan fungsi respon Holling tipe I atau Holling tipe II karena bentuk matematisnya relatif sederhana. Namun demikian, fungsi respon Holling tipe III dianggap lebih realistis dalam menggambarkan proses pemangsaan pada ekosistem nyata karena menghasilkan kurva sigmoid yang menunjukkan rendahnya tingkat pemangsaan pada kepadatan mangsa yang kecil dan meningkat secara bertahap seiring bertambahnya kepadatan mangsa.[2] Karakteristik tersebut mampu merepresentasikan perilaku pembelajaran predator dan mekanisme perlindungan mangsa pada kepadatan rendah. Berbagai penelitian menunjukkan bahwa fungsi respon Holling tipe III dapat menghasilkan dinamika yang lebih kompleks dibandingkan Holling tipe II, termasuk munculnya multistabilitas dan limit cycle.

Dalam kenyataannya, interaksi biologis tidak berlangsung secara instan. Predator memerlukan waktu untuk mencari, menangkap, dan mencerna mangsa, sedangkan penyebaran penyakit maupun proses reproduksi juga membutuhkan selang waktu tertentu. Fenomena tersebut dapat direpresentasikan melalui parameter waktu tunda (*time delay*). Kehadiran waktu tunda diketahui dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik ekuilibrium dan memunculkan osilasi periodik melalui mekanisme bifurkasi Hopf. Hussien dkk.[7] dan Pandey dkk.[10] menunjukkan bahwa waktu tunda dapat memicu bifurkasi. Akan tetapi fungsi respon yang digunakan masih berupa fungsi respon Holling tipe II atau bentuk nonlinier lainnya sehingga belum menggambarkan karakteristik sigmoid yang dimiliki fungsi respon Holling tipe III.

Di sisi lain, penelitian mengenai pengaruh waktu tunda terhadap model eco-epidemiologi juga telah banyak dilakukan. Zhang dkk.[14] menganalisis kestabilan dan bifurkasi Hopf pada sistem eco-epidemiologi yang melibatkan perilaku anti-predator, sedangkan Sarwadi dkk.[12] menganalisis model penyakit *prey* dengan functional response Crowley-Martin dan gestation delay predator. Meskipun berhasil menunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf, kedua penelitian tersebut tidak menggunakan struktur S-I-P dengan fungsi respon Holling tipe III. Fei dkk.[4] mengembangkan model eco-epidemiologi diskrit dengan fungsi respon Holling tipe III dan menunjukkan keberadaan berbagai jenis bifurkasi pada titik kesetimbangan positif. Akan tetapi, penelitian tersebut diformulasikan dalam bentuk sistem diskrit dan tidak mempertimbangkan pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan sistem. Zhang dan Muhammadhaji[16] mengembangkan model *predator-prey* orde fraksional dengan

keterlambatan waktu (time delay) dengan efek perlindungan mangsa menggunakan fungsi respon Holling Tipe II. Hasil penelitian tersebut menunjukkan peningkatan orde fraksional mempercepat terjadinya bifurkasi Hopf. Zhang et al.[15] mengembangkan model eco-epidemiologi bv yang mengintegrasikan penyakit pada predator dengan fear effect. Hasil penelitian menunjukkan peningkatan Tingkat ketakutan memicu munculnya osilasi periodik melalui bifurkasi Hopf. Li dan Liu[6] menganalisis model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe III yang melibatkan waktu tunda dan menunjukkan bahwa parameter waktu tunda dapat menyebabkan perubahan kestabilan sistem. Selanjutnya, Ávila-Vales dkk.[1] menunjukkan keberadaan berbagai jenis bifurkasi, termasuk bifurkasi Hopf, pada model Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe III. Pada aspek eco-epidemiologi, Shaikh dkk.[13] mengembangkan model *predator-prey* dengan penyakit pada populasi predator dan fungsi respon Holling tipe III serta menunjukkan bahwa keberadaan penyakit memengaruhi kestabilan titik ekuilibrium. Firdiansyah dkk.[5] juga menunjukkan bahwa parameter biologis tertentu dapat memicu bifurkasi Hopf pada model eco-epidemiologi dengan fungsi respon Holling tipe III. Penelitian yang lebih mutakhir oleh Prakash dan Vamsi[11] serta Dawed dan Alemu[3] semakin memperlihatkan bahwa fungsi respon Holling tipe III mampu menghasilkan dinamika sistem yang kompleks, termasuk perubahan kestabilan, osilasi periodik, dan bifurkasi Hopf pada berbagai model *predator-prey* maupun eco-epidemiologi.

Berdasarkan telaah literatur tersebut, masih terdapat penelitian yang perlu dikaji lebih lanjut. Sebagian penelitian membahas model eco-epidemiologi dengan fungsi respon Holling tipe III tanpa mempertimbangkan waktu tunda, sementara penelitian lainnya mengkaji pengaruh waktu tunda tetapi menggunakan fungsi respon yang berbeda atau struktur populasi yang tidak berbentuk S-I-P. Hingga saat ini, kajian mengenai model *predator-prey* S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey*, fungsi respon Holling tipe III, dan waktu tunda dalam satu kerangka model kontinu serta analisis bifurkasi Hopf akibat perubahan waktu tunda masih sangat terbatas.

Berdasarkan dari kajian sebelumnya, penelitian ini mengembangkan model matematika *predator-prey* S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey* dan fungsi respon Holling tipe III yang melibatkan parameter waktu tunda. Selanjutnya dilakukan penondimensionalan model, penentuan titik ekuilibrium, analisis kestabilan lokal tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda, serta analisis keberadaan bifurkasi Hopf menggunakan teori persamaan diferensial tunda. Simulasi numerik dilakukan untuk memverifikasi hasil analitik dan menunjukkan pengaruh variasi waktu tunda terhadap dinamika sistem. Kebaruan penelitian ini terletak pada analisis bifurkasi Hopf pada model S-I-P dengan fungsi respon Holling tipe III dan waktu tunda yang secara simultan mempertimbangkan penyebaran penyakit pada populasi *prey*.

2. MODEL MATEMATIKA

Model yang akan dibahas dalam artikel ini adalah model S-I-P interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe III. Asumsi-asumsi yang digunakan pada model *predator-prey* sebagai berikut.

1. Laju pertumbuhan populasi *prey* memiliki pola pertumbuhan logistik.
2. Penyakit hanya menginfeksi populasi *prey* dan *prey* yang terinfeksi tidak bisa disembuhkan atau menjadi kebal.
3. Makanan dari *prey* memiliki jumlah yang terbatas sehingga terjadi kompetisi antara *prey* sendiri dalam memperebutkan makanan.
4. Persediaan makanan *predator* bergantung pada populasi *prey*.
5. Pada saat terjadinya interaksi *prey* dengan predator, populasi *prey* akan menurun sedangkan populasi *predator* akan meningkat.
6. Dalam interaksinya, *predator* hanya memakan mangsa yang terinfeksi.
7. Dalam ekosistem, hanya ada 1 jenis mangsa untuk dikonsumsi oleh *predator*.

8. *Prey* merespon kehadiran *predator* sehingga *predator* memerlukan waktu untuk menangkap *prey* (*predator* mengikuti fungsi respon Holling tipe III).

Modifikasi model *predator-prey* S-I-P dengan fungsi respon Holling tipe III dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \beta x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta x_1 x_2 - \frac{ax_2^2 x_3}{b^2 + x_2^2} - cx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = \mu \left(\frac{ax_2^2 x_3}{b^2 + x_2^2}\right) - dx_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$ dan $x_3(0) > 0$

dimana $S = \frac{x_1}{K}, I = \frac{x_2}{K}, P = \frac{x_3}{K}, T = rt > 0, A = \frac{a}{r} > 0, B = \frac{b}{K} > 0, C = \frac{c}{r} > 0, D = \frac{d}{r} > 0$ dan $m = \frac{\beta K}{r} > 0$.

Pada sistem (2.1), $x_1 = SK$ mempresentasikan kepadatan populasi *prey* rentan penyakit disertai dengan adanya pengaruh dari lingkungan, $x_2 = IK$ mengartikan kepadatan populasi *prey* yang terinfeksi disertai pengaruh dari lingkungan, $x_3 = PK$ mengartikan kepadatan populasi *predator* disertai pengaruh lingkungan, $t = \frac{T}{r}$ mempresentasikan kelipatan dari waktu t , $a = Ar$ angka penurunan kepadatan populasi *prey* akibat interaksi antara *prey* dan *predator*, $b = BK$ mempresentasikan tingkat kejenuhan pemangsaan dengan adanya pengaruh dari lingkungan, $\beta = \frac{rm}{K}$ tingkat penyebaran penyakit menular pada populasi mangsa $c = Cr$ dan $d = Dr$ masing-masing adalah laju kematian alami dari mangsa dan *predator*, μ tingkat pertumbuhan populasi *predator*. Sistem (2.1) dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dT} = S(1 - S) - mSI \\ \frac{dI}{dT} = mSI - \frac{AI^2P}{B^2 + I^2} - CI \\ \frac{dP}{dT} = \mu \left(\frac{AI^2P}{B^2 + I^2}\right) - DP \end{cases}$$

Kemudian dengan pemberian waktu tunda diskrit pada laju pertumbuhan populasi *prey* yang terinfeksi, model persamaan menjadi

$$\begin{cases} \frac{dS(T)}{dT} = S(T)(1 - S(T)) - mS(T)I(T - \tau) \\ \frac{dI(T)}{dT} = mS(T)I(T - \tau) - \frac{A(I(T))^2 P(T)}{B^2 + (I(T))^2} - CI \\ \frac{dP(T)}{dT} = \mu \left(\frac{A(I(T))^2 P(T)}{B^2 + (I(T))^2}\right) - DP(T) \end{cases} \quad (2.2)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Titik Ekuilibrium

Sistem (2.2) mencapai titik kesetimbangan ketika $\frac{dS}{dT} = 0, \frac{dI}{dT} = 0$ dan $\frac{dP}{dT} = 0$, sehingga sistem (2.2) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{dS}{dT} = S(1 - S) - mSI = 0, \\ (b) \quad & \frac{dI}{dT} = mSI - \frac{AI^2P}{B^2 + I^2} - CI = 0, \\ (c) \quad & \frac{dP}{dT} = \mu \left(\frac{AI^2P}{B^2 + I^2}\right) - DP = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dari persamaan (3.1), diperoleh $\mu \left(\frac{AI^2 P}{B^2 + I^2} \right) - DP = 0 \Leftrightarrow P = 0 \vee I^2 = \frac{DB^2}{\mu A - D}$. Jika, $P = 0$ dari persamaan (b) pada sistem (3.1), diperoleh

$$mSI - CI = 0 \Leftrightarrow I(mS - C) = 0 \Leftrightarrow I = 0 \vee S = \frac{C}{m}.$$

Substitusi $I = 0$ dan $P = 0$ ke persamaan (a) pada sistem (3.1), maka

$$S(1 - S) = 0 \Leftrightarrow S = 0 \vee S = 1.$$

Jadi, untuk $I = 0$ dan $P = 0$ titik kesetimbangannya adalah $E_0(0,0,0)$ dan $E_1(1,0,0)$. Substitusi $S = \frac{C}{m}$ dan $P = 0$ ke persamaan (a) pada sistem (3.1) yang menghasilkan $I = -\frac{-m+C}{m^2}$. Jadi, jika $C < m$, maka titik kesetimbangannya adalah $E_2\left(\frac{C}{m}, -\frac{-m+C}{m^2}, 0\right)$. Jika $I = BR$, dimana $R = \sqrt{\frac{D}{\mu A - D}}$ dari persamaan (a) pada sistem (3.1), diperoleh sebagai berikut.

$$S(1 - S - mI) = 0 \Leftrightarrow S = 0 \vee S = 1 - mBR.$$

Substitusi $I = BR$ dan $S = 0$ ke persamaan (b) pada sistem (3.1) sehingga diperoleh $P = -\frac{B\mu C}{(A\mu - D)R}$.

Maka jika $\mu A > D$ dan $mBR < 1$, $E_3\left(0, BR, -\frac{B\mu C}{(A\mu - D)R}\right)$ dengan $R = \sqrt{\frac{D}{\mu A - D}}$ adalah titik ekuilibrium.

Substitusi $I = BR$, dimana $R = \sqrt{\frac{D}{\mu A - D}}$ dan $S = 1 - mBR$ ke persamaan (b) pada sistem (3.1) sehingga diperoleh $P = -\frac{B\mu(Bm^2R + C - m)}{(A\mu - D)R}$. Jadi, jika $\mu A > D$ dan $Bm^2R + C > m$ maka titik kesetimbangannya adalah $E^*\left(1 - BmR, BR, \frac{B\mu(Bm^2R + C - m)}{(A\mu - D)R}\right)$.

3.2 Stabilitas Tanpa Waktu Tunda

Matriks Jacobian dari persamaan (3.1) diberikan oleh

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2S - mI & -mS & 0 \\ mI & mS - \frac{2AB^2IP}{(B^2 + I^2)^2} - C & -\frac{AI^2}{B^2 + I^2} \\ 0 & \frac{2\mu AB^2IP}{(B^2 + I^2)^2} & \frac{\mu AI^2}{B^2 + I^2} - D \end{pmatrix}$$

Pada titik E_0 , matriks Jacobiannya adalah $J(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = -C \vee \lambda_3 = -D$. Jadi E_0 adalah titik pelana yang tidak stabil.

Pada titik E_1 , matriks Jacobiannya adalah $J(1,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -m & 0 \\ 0 & m - C & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = -1 \vee \lambda_2 = m - C \vee \lambda_3 = -D$. Jadi, E_1 adalah titik pelana yang tidak stabil.

Pada titik E_2 , matriks Jacobiannya adalah $J\left(\frac{C}{m}, -\frac{-m+C}{m^2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{C}{m} & -C & 0 \\ 1 - \frac{C}{m} & 0 & -\frac{AC(m-C)^2}{B^2m^4 + (m-C)^2} \\ 0 & 0 & \frac{\mu A(m-C)^2}{B^2m^4 + (m-C)^2} - D \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = \frac{\mu A(m-C)^2}{B^2m^4 + (m-C)^2} - D$. Dua nilai eigennya dapat

ditentukan dari polynomial karakteristik.

$$\lambda^2 + \frac{C}{m}\lambda + \frac{C(m-C)}{m}.$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI

Gesti Essa Waldhani

Karena $\frac{C}{m} > 0$ dan $C < m$ maka semua bagian real dari solusi persamaan (3.1) negative jika $\frac{\mu A(m-C)^2}{B^2 m^4 + (m-C)^2} < D$. Jadi E_2 stabil.

Pada titik E_3 , matriks Jacobiannya adalah $J\left(0, BR, -\frac{B\mu C}{(A\mu-D)R}\right) = \begin{pmatrix} 1 - BRm & 0 & 0 \\ BRm & C - \frac{2CD}{A\mu} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & \frac{2C(A\mu-D)}{A} & 0 \end{pmatrix}$.

Diperoleh $\lambda_1 = 1 - BRm$. Dua nilai eigennya dapat ditentukan dari polynomial karakteristik.

$$\lambda^2 + \frac{C(A\mu-2D)}{A\mu}\lambda + \frac{2CD(D-A\mu)}{A\mu}.$$

Karena $A\mu > D$ maka $\frac{2CD(D-A\mu)}{A\mu} < 0$ maka hasil kali kedua eigen tersebut negative. Jadi satu eigen positif dan satu eigen negative. Dengan demikian E_3 tidak stabil.

Pada titik $E^*\left(1 - BmR, BR, \frac{B\mu(Bm^2R+C-m)}{(A\mu-D)R}\right)$ dengan $R = \sqrt{\frac{D}{\mu A-D}}$ substitusi ke Jacobian menghasilkan polinom karakteristik orde tiga $\lambda^3 + K_1\lambda^2 + K_2\lambda + K_3 = 0$

$$K_1 = 1 + 3C - 3m + BRm(3m - 1) - \frac{2D}{A\mu}(BRm^2 + C - m),$$

$$K_2 = -4BR^2m^3 - 3BRCm + 2BRDm^2 + 7BRm^2 + 2CD + 3C - 2Dm - 3m + \frac{2D}{A\mu}(BR^2m^3 + BRCm - DBRm^2 - 2BRm^2 - CD + Dm),$$

$$K_3 = 2D(BRm^2 + C - m)\left[1 - \frac{D}{A\mu}\right](2 - BRm),$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, jika $K_1 > 0, K_2 > 0, K_3 > 0$ dan $K_1K_2 > K_3$ maka semua bagian real nilai eigen adalah negative. Jadi $E^*\left(1 - BmR, BR, \frac{B\mu(Bm^2R+C-m)}{(A\mu-D)R}\right)$ adalah titik stabil jika $A\mu > D, 1 - BmR > 0, Bm^2R + C - m > 0$ dan koefisien karakteristik memenuhi $K_1 > 0, K_2 > 0, K_3 > 0$ serta $K_1K_2 > K_3$.

3.3 Stabilitas dengan Waktu Tunda

Dalam menganalisis kestabilan E^* dengan waktu tunda. Persamaan (3.1) perlu dilinierkan di sekitar titik keseimbangan E^* , maka diperoleh model linierisasi

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{dS(T)}{dt} &= a_1S(T) - b_2I(T - \tau), \\ (b) \quad \frac{dI(T)}{dT} &= b_1S(T - \tau) - a_2I(T) - a_3P(T) + b_2I(T - \tau), \\ (c) \quad \frac{dP(T)}{dT} &= a_4I(T) + a_5P(T) \end{aligned} \quad (3.2)$$

dimana

$$a_1 = 1 - 2S^* - mI^*, a_2 = C + \frac{2AB^2I^*P^*}{(B^2+I^{*2})^2}, a_3 = \frac{AI^{*2}}{B^2+I^{*2}}, a_4 = \frac{2\mu AB^2I^*P^*}{(B^2+I^{*2})^2}, a_5 = \frac{\mu AI^{*2}}{B^2+I^{*2}} - D, b_1 = mI^*, b_2 = mS^*.$$

Misalkan solusi sistem (3.2) adalah

$$S(T) = le^{\lambda T}, I(T) = me^{\lambda T}, P(T) = ne^{\lambda T} \quad (3.3)$$

Substitusi persamaan (3.3) ke persamaan (3.2) lalu bagi dengan $e^{\lambda T}$ sehingga diperoleh

$$\begin{cases} l\lambda = a_1l - b_2me^{-\lambda\tau}, \\ m\lambda = b_1l - a_2m - a_3n + b_2me^{-\lambda\tau}, \\ n\lambda = a_4m + a_5n \end{cases} \quad (3.4)$$

Sistem (3.4) dapat ditulis dalam bentuk berikut.

$$\begin{bmatrix} l\lambda \\ m\lambda \\ n\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & -b_2 e^{-\lambda\tau} & 0 \\ b_1 & -a_2 + b_2 e^{-\lambda\tau} & -a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -b_2 e^{-\lambda\tau} & 0 \\ b_1 & -a_2 + b_2 e^{-\lambda\tau} - \lambda & -a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + P_2 \lambda^2 + P_1 \lambda + P_0 + (Q_2 \lambda^2 + Q_1 \lambda + Q_0) e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.6)$$

dengan $P_2 = a_2 - a_1 - a_5, P_1 = a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_2 a_5 + a_1 a_5, P_0 = a_1 a_2 a_5 - a_1 a_3 a_4, Q_2 = -b_2, Q_1 = b_2(a_1 + a_5 + b_1)$ dan $Q_0 = -a_2 a_5(a_1 + b_1)$

Nilai eigen persamaan (3.6) adalah bilangan real negatif dan bilangan kompleks dengan bagian real negatif. Jadi dengan waktu tunda, E^* stabil jika dan hanya jika $P_2 + Q_2 > 0, P_1 + Q_1 > 0$ dan $P_0 + Q_1 > 0$. Sehingga nilai eigen persamaan karakteristik (3.6) diasumsikan $\lambda = u + i\omega$ dengan $u = 0$ dan $\omega > 0 (\lambda = +i\omega)$. Untuk melihat perubahan kestabilan model persamaan dengan waktu tunda, nilai eigen disubstitusi ke persamaan (3.6) sehingga diperoleh akar-akar persamaan karakteristik.

$$-i\omega^3 - P_2 \omega^2 + P_1 i\omega + P_0 + Q_0 \cos \omega\tau - Q_2 \omega^2 \cos \omega\tau + Q_1 \omega \sin \omega\tau + Q_1 \omega i \sin \omega\tau - Q_0 i \sin \omega\tau + Q_2 \omega^2 i \sin \omega\tau = 0 \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) bernilai nol jika bagian imajiner dan real sama dengan nol sehingga diperoleh

$$(Q_0 - Q_2 \omega^2) \cos \omega\tau + Q_1 \omega \sin \omega\tau = P_2 \omega^2 - P_0 \quad (3.8)$$

$$\text{dan } Q_1 \omega \cos \omega\tau - (Q_0 - Q_2 \omega^2) \sin \omega\tau = \omega^3 - P_1 \omega \quad (3.9)$$

Kemudian mengeliminasi persamaan (3.8) dan (3.9) terhadap τ dengan mengkuadratkan setiap ruas persamaan tersebut, maka diperoleh.

$$Q_0^2 \cos^2 \omega\tau - 2Q_0 Q_2 \omega^2 \cos^2 \omega\tau + Q_2^2 \omega^4 \cos^2 \omega\tau + 2Q_0 Q_1 \omega \sin \omega\tau \cos \omega\tau - 2Q_1 Q_2 \omega^3 \sin \omega\tau \cos \omega\tau + Q_1^2 \omega^2 \sin^2 \omega\tau = P_2^2 \omega^4 - 2P_0 P_2 \omega^2 + P_0^2 \quad (3.10)$$

dan

$$Q_0^2 \sin^2 \omega\tau - 2Q_0 Q_2 \omega^2 \sin^2 \omega\tau + Q_2^2 \omega^4 \sin^2 \omega\tau - 2Q_0 Q_1 \omega \sin \omega\tau \cos \omega\tau + 2Q_1 Q_2 \omega^3 \sin \omega\tau \cos \omega\tau + Q_1^2 \omega^2 \cos^2 \omega\tau = \omega^6 - 2P_1 \omega^4 + P_1^2 \omega^2. \quad (3.11)$$

Persamaan (3.10) dan (3.11) dijumlahkan dan dikelompokkan berdasarkan pangkatnya, sehingga diperoleh persamaan polinomial berderajat enam sebagai berikut.

$$\omega^6 + (P_2^2 - 2P_1 - Q_2^2) \omega^4 + (P_1^2 - 2P_0 P_2 - Q_1^2 + 2Q_0 Q_2) \omega^2 + (P_0^2 - Q_0^2) \quad (3.12)$$

Selanjutnya, nilai waktu tunda kritis (τ_k) dengan tahapan sebagai berikut.

Langkah pertama substitusi ω_k ke persamaan (3.8) dan (3.9) kemudian mengeliminasi fungsi cosinus dari persamaan (3.8) dan (3.9)

$$(Q_0^2 - 2Q_0 Q_2 \omega_k^2 + Q_2^2 \omega_k^4 + Q_1^2 \omega_k^2) \cos \omega_k \tau = (-Q_2 P_2 + Q_1) \omega_k^4 + (Q_0 P_2 + Q_2 P_0 - Q_1 P_1) \omega_k^2 - Q_0 P_0 \quad (3.13)$$

Selanjutnya mengeliminasi fungsi sinus dari persamaan (3.8) dan (3.9)

$$(Q_0^2 - 2Q_0 Q_2 \omega_k^2 + Q_2^2 \omega_k^4 + Q_1^2 \omega_k^2) \sin \omega_k \tau = Q_2 \omega_k^5 + (P_2 Q_1 - Q_0 - P_1 Q_2) \omega_k^3 + (P_1 Q_0 - P_0 Q_1) \omega_k \quad (3.14)$$

Dari (3.13) dan (3.14) diperoleh

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_k} \tan^{-1} \left(\frac{Q_2 \omega_k^5 + (P_2 Q_1 - Q_0 - P_1 Q_2) \omega_k^3 + (P_1 Q_0 - P_0 Q_1) \omega_k}{(-Q_2 P_2 + Q_1) \omega_k^4 + (Q_0 P_2 + Q_2 P_0 - Q_1 P_1) \omega_k^2 - Q_0 P_0} \right) \quad (3.15)$$

Selanjutnya diferensialkan persamaan (3.6) terhadap τ , maka diperoleh

$$\lambda^3 + P_2 \lambda^2 + P_1 \lambda + P_0 + Q_2 \lambda^2 e^{-\lambda\tau} + Q_1 \lambda e^{-\lambda\tau} + Q_0 e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.16)$$

dengan $P_2 = a_2 - a_1 - a_5, P_1 = a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_2 a_5 + a_1 a_5, P_0 = a_1 a_2 a_5 - a_1 a_3 a_4, Q_2 = -b_2, Q_1 = b_2(a_1 + a_5 + b_1)$ dan $Q_0 = -a_2 a_5(a_1 + b_1)$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{d(\lambda^3)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + P_2 \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + P_1 \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + Q_2 \left\{ \lambda^2 \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} \\
&+ Q_1 \left\{ \lambda \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} + Q_0 \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow 3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} + 2P_2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + P_1 \frac{d\lambda}{d\tau} + \left(2Q_2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + Q_1 \frac{d\lambda}{d\tau} \right) e^{-\lambda\tau} + (Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0)e^{-\lambda\tau} \left(-\lambda - \tau \frac{d\lambda}{d\tau} \right) = 0
\end{aligned}$$

Kelompokkan suku-suku yang memiliki $\frac{d\lambda}{d\tau}$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} \left[(3\lambda^2 + 2P_2\lambda + P_1) + (2Q_2\lambda + Q_1)e^{-\lambda\tau} - \tau(Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0)e^{-\lambda\tau} \right] = \lambda(Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0)e^{-\lambda\tau}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda(Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0)e^{-\lambda\tau}}{(3\lambda^2 + 2P_2\lambda + P_1) + (2Q_2\lambda + Q_1)e^{-\lambda\tau} - \tau(Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0)e^{-\lambda\tau}}$$

Dari persamaan (3.16), dipunyai $e^{-\lambda\tau} = \frac{-(\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0)}{Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0}$. Maka diperoleh

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-\lambda^4 - P_2\lambda^3 - P_1\lambda^2 - P_0\lambda}{3\lambda^2 + 2P_2\lambda + P_1 + \tau(\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0) + (2Q_2\lambda + Q_1) \left[\frac{-(\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0)}{Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0} \right]}$$

Untuk mempermudah pemisahan bagian real, sebaiknya mencari nilai dari kebalikan turunannya, yaitu

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{3\lambda^2 + 2P_2\lambda + P_1}{-\lambda^4 - P_2\lambda^3 - P_1\lambda^2 - P_0\lambda} + \frac{2Q_2\lambda + Q_1}{\lambda(Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

Pada saat bifurkasi Hopf terjadi ($\tau = \tau_b$), nilai eigen menjadi murni imajiner $\lambda = i\omega_b$ (dengan $\omega_b > 0$)

Yang menunjukkan bahwa kondisi transversal terpenuhi, sehingga terjadi bifurkasi Hopf pada $\tau = \tau_b$.

$$= \frac{(P_1 - 3\omega_b^2) + i(2P_2\omega_b)}{-\omega_b^4 + P_1\omega_b^2 - i(P_0\omega_b - P_2\omega_b^3)} + \frac{Q_1 + i(2Q_2\omega_b)}{-Q_1\omega_b^2 + i(Q_0\omega_b^2 - Q_2\omega_b^3)} + i \frac{\tau}{\omega_b}$$

Bagian real dari persamaan transversal diatas

$$Re \left[\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega_b} = \frac{(P_1 - 3\omega_b^2)(P_1\omega_b^2 - \omega_b^4) + (2P_2\omega_b)(P_2\omega_b^3 - P_0\omega_b)}{(P_1\omega_b^2 - \omega_b^4)^2 + (P_2\omega_b^3 - P_0\omega_b)^2} + \frac{Q_1^2\omega_b^2 + 2Q_2\omega_b(Q_0\omega_b - Q_2\omega_b^3)}{(Q_1\omega_b^2)^2 + (Q_0\omega_b - Q_2\omega_b^3)^2}$$

Dari persamaan (3.12) dipunyai $F(\omega_b) = \omega_b^6 + (P_2^2 - 2P_1 - Q_2^2)\omega_b^4 + (P_1^2 - 2P_0P_2 - Q_1^2 + 2Q_0Q_2)\omega_b^2 + (P_0^2 - Q_0^2)$.

Mari kita turunkan fungsi $F(\omega_b)$ terhadap ω_b :

$$F'(\omega_b) = 6\omega_b^5 + 4(P_2^2 - 2P_1 - Q_2^2)\omega_b^3 + 2(P_1^2 - 2P_0P_2 - Q_1^2 + 2Q_0Q_2)\omega_b.$$

Jika kita bagi seluruh persamaan dengan $2\omega_b$ (karena $\omega_b > 0$), kita mendapat

$$\frac{F'(\omega_b)}{2\omega_b} = 3\omega_b^4 + 2(P_2^2 - 2P_1 - Q_2^2)\omega_b^2 + (P_1^2 - 2P_0P_2 - Q_1^2 + 2Q_0Q_2)$$

$$\text{Jadi } Re \left[\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega_b} = \frac{F'(\omega_b)}{2\omega_b\Delta}$$

$$\text{Dengan } \Delta = (Q_1\omega_b)^2 + (Q_0 - Q_2\omega_b^2)^2.$$

Karena ω_b merupakan akar tunggal dari fungsi karakteristik $F(\omega_b) = 0$ dengan nilai $F(\omega_b) > 0$ maka gradien atau turunan pertama fungsi di titik tersebut $F'(\omega_b)$ dipastikan tidak bernilai nol. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa nilai dari kondisi transversal tersebut tidak sama dengan nol dan syarat bifurkasi Hopf terpenuhi.

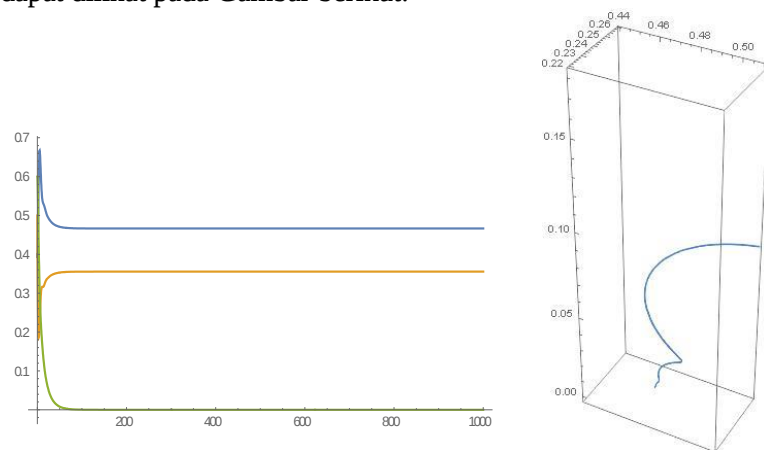
3.4 Simulasi di Titik E_0, E_1, E_2, E_3 dan E^* Tanpa Waktu Tunda

Untuk menemukan solusinya dipilih nilai-nilai parameter yang diberikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Daftar titik ekuilibrium, parameter batas keberadaan titik ekuilibrium, nilai-nilai parameter

Titik	Parameter	Kestabilan
E_0	$m = 1,5$	Tidak stabil
E_1	$A = 1$	
E_3	$B = 0,6$	
	$C = 0,7$	
	$D = 0,2$	
	$\mu = 0,5$	Stabil
E_2	$m = 3,1$	
	$A = 0,85$	
	$B = 0,6$	
	$C = 0,41$	
	$D = 0,2$	
	$\mu = 0,5$	Stabil
E^*	$m = 2,15$	
	$A = 0,82$	
	$B = 0,5$	
	$C = 0,35$	
	$D = 0,2$	
	$\mu = 0,5$	

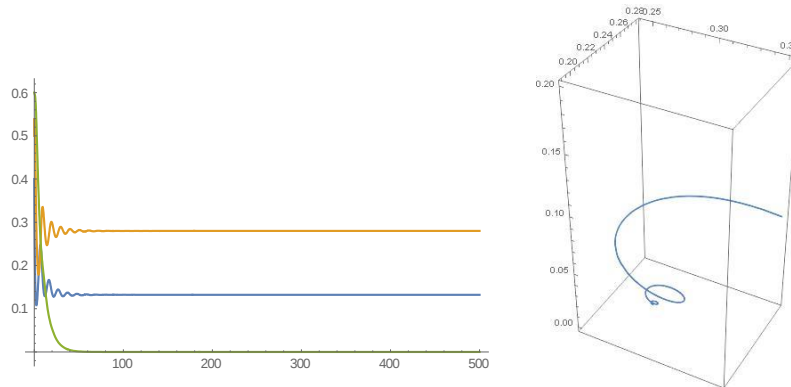
Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar berikut.



Gambar 3.1 Bidang solusi dan potret fase sistem pada model untuk titik ekuilibrium E_0, E_1 dan E_3

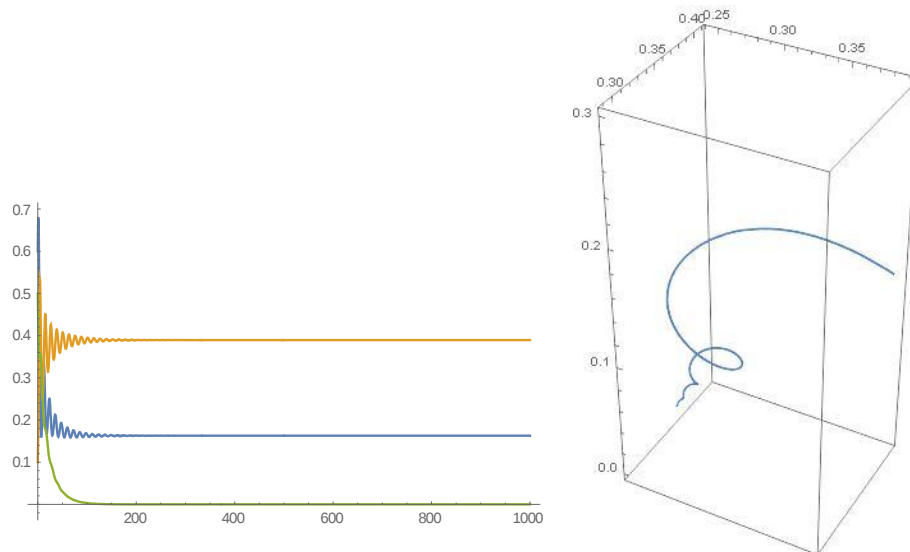
Pada kasus ini, osilasi yang terjadi di awal waktu memiliki simpangan yang semakin besar. Kemudian di akhir waktu *Predator-prey* mengalami penurunan jumlah. Untuk potret fase

sistem karena semua trayektori keluar dari titik E_0, E_1 dan E_3 , maka E_0 dan E_1 bersifat tidak stabil.



Gambar 3.2 Bidang solusi dan potret fase sistem pada model untuk titik ekuilibrium E_2

Pada Gambar 3.2, untuk bidang solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga *predator* dan *prey* berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai. Pada kasus ini, untuk potret fase titik ekuilibrium E_2 merupakan merupakan titik simpul stabil.



Gambar 3.3 Bidang solusi dan potret fase sistem pada model untuk titik ekuilibrium E^*

Pada Gambar 3.3, untuk bidang solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga *predator* dan *prey* berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai. Pada kasus ini, untuk potret fase titik ekuilibrium E^* merupakan merupakan titik simpul stabil.

3.5 Simulasi dengan Waktu Tunda

Simulasi numerik model *predator-prey* dengan waktu tunda dilakukan untuk menunjukkan adanya pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik tetap E^* .

Tabel 3.2. Nilai parameter di titik ekuilibrium E^* dengan waktu tunda

Parameter	Nilai
m	0,875
A	0,656
B	1,085
C	0,33
D	0,19
μ	0,785

Dari Tabel 3.2 diperoleh

$$R = \sqrt{\frac{D}{\mu A - D}} = 0,787.$$

$$S^* = 1 - BmR = 0,251.$$

$$I^* = BR = 0,855.$$

$$P^* = \frac{B\mu(Bm^2R + C - m)}{(A\mu - D)R} = 0,153.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium $E^*(0,251; 0,855; 0,153)$.

Kemudian dari nilai-nilai parameter yang disajikan pada Tabel 3.2, diperoleh

$$a_1 = 1 - 2S^* - mI^* = -0,25138$$

$$a_2 = C + \frac{2AB^2I^*P^*}{(B^2 + I^{*2})^2} = 0,38617$$

$$a_3 = \frac{AI^{*2}}{B^2 + I^{*2}} = 0,25121$$

$$a_4 = \frac{2\mu AB^2I^*P^*}{(B^2 + I^{*2})^2} = 0,04365$$

$$a_5 = \frac{\mu AI^{*2}}{B^2 + I^{*2}} - D \approx 0$$

$$b_1 = mI^* = 0,74861$$

$$b_2 = mS^* = 0,22003$$

$$P_2 = a_2 - a_1 - a_5 = 0,63755$$

$$P_1 = a_3a_4 - a_1a_2 - a_2a_5 + a_1a_5 = 0,10804$$

$$P_0 = a_1a_2a_5 - a_1a_3a_4 = 0,00275$$

$$Q_2 = -b_2 = -0,22003$$

$$Q_1 = b_2(a_1 + a_5 + b_1) = 0,1094$$

$$Q_0 = -a_2a_5(a_1 + b_1) \approx 0$$

$$\omega^6 + (P_2^2 - 2P_1 - Q_2^2)\omega^4 + (P_1^2 - 2P_0P_2 - Q_1^2 + 2Q_0Q_2)\omega^2 + (P_0^2 - Q_0^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^6 + 0,37305564\omega^4 - 0,00381121\omega^2 + 0,00000759935 = 0 \quad (3.17)$$

Karena $\omega > 0$, maka dipilih $\omega_1 = 0,05222449$. Kemudian dicari nilai τ_k dengan mensubstitusikan nilai-nilai b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 dan ω_k ke persamaan berikut.

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_k} \tan^{-1} \left(\frac{Q_2\omega^5 + (P_2Q_1 - Q_0 - P_1Q_2)\omega^3 + (P_1Q_0 - P_0Q_1)\omega}{(-Q_2P_2 + Q_1)\omega^4 + (Q_0P_2 + Q_2P_0 - Q_1P_1)\omega^2 - Q_0P_0} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \tau_k = 1,499999938 \approx 1,5.$$

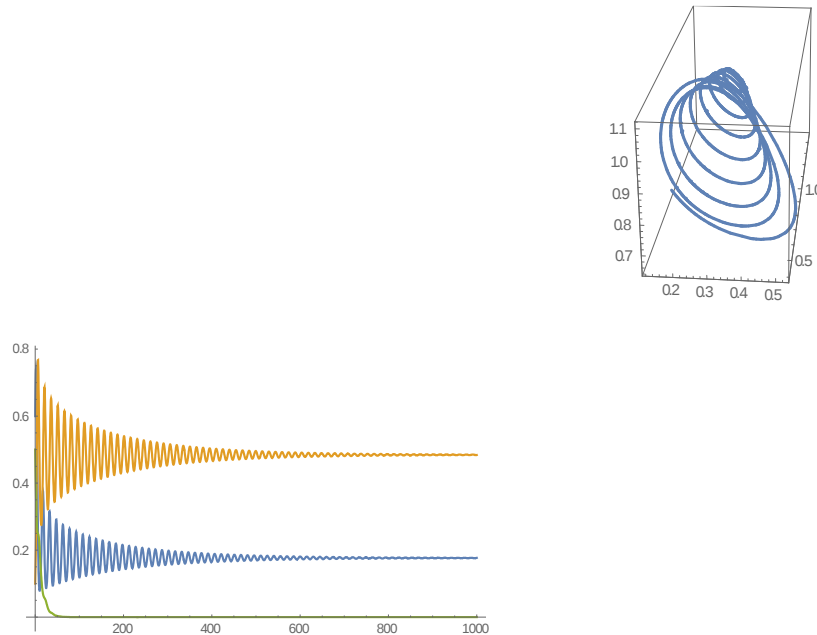
Pada tabel 3.3 dapat dilihat bahwa nilai batas waktu tunda pada jarak $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Tabel 3.3 Nilai waktu tunda pada jarak $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

k	τ
0	1,551
1	17,491
2	33,431
$\vdots$	$\vdots$
n	τ_n
k	τ

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTASI

Gesti Essa Waldhani



Dalam artikel ini, hanya dibahas nilai waktu tunda pada saat, sebelum dan sesudah nilai batas waktu tunda pada jarak $k = 0$. Pada simulasi ini akan disediakan tiga kasus untuk menunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf.

3.5.1 Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau < \tau_k$

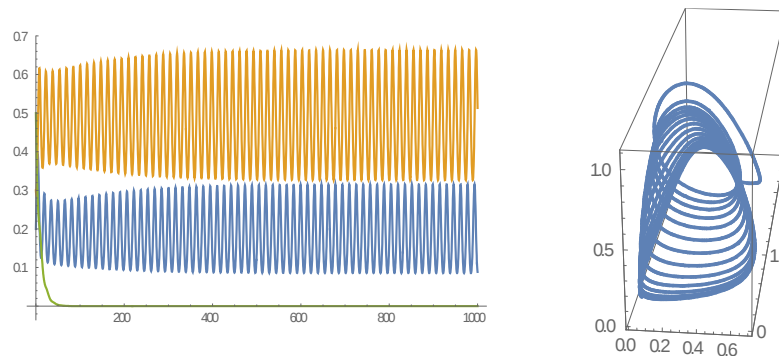
Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 1 < \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.4.

Gambar 3.4. Bidang solusi sistem dan potret fase di titik ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau < \tau_k$

Pada Gambar 3.4 memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin besar, sehingga kedua populasi tersebut berkembang dan akhirnya menjauhi titik keseimbangannya.

3.5.2 Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau = \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 1,5 = \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.5.

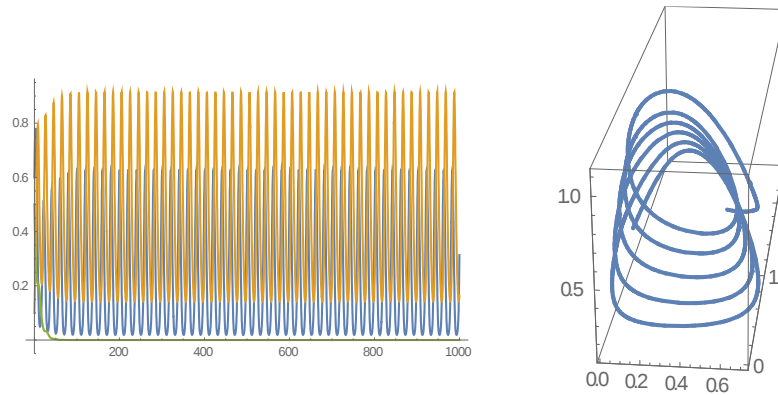


Gambar 3.5. Bidang solusi sistem dan potret fase di titik ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau = \tau_k$

Pada Gambar 3.5, untuk bidang solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga kedua populasi tersebut berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai.

3.5.3 Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau > \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 2 > \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.6



Gambar 3.6. Bidang solusi sistem dan potret fase di titik ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau > \tau_k$

Pada Gambar 3.6, untuk bidang solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga kedua populasi tersebut berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai.

4. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa berdasarkan penondimensioalan model, diperoleh model matematika S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey* dan fungsi respon Holling tipe III.

Dari model tersebut diperoleh lima titik kesetimbangan, yaitu E_0, E_1, E_2, E_3 dan E^* dengan asumsi terdapat titik ekuilibrium E_0, E_1, E_2, E_3 dan E^* jika $C < m, \mu A > D, mBR < 1$, dan $Bm^2R + C > m$

Dari analisis kestabilan diperoleh lima titik ekuilibrium yang stabil pada kondisi tertentu, yaitu titik E_2 stabil jika $\frac{\mu A(m-C)^2}{B^2m^4 + (m-C)^2} < D$ dan E^* stabil jika $\mu A > D, 1 - BmR > 0, Bm^2R + C - m > 0$ dan koefisien karakteristik memenuhi $K_1 > 0, K_2 > 0, K_3 > 0$ serta $K_1K_2 > K_3$ dengan $K_1 = 1 + 3C - 3m + BRm(3m - 1) - \frac{2D}{A\mu}(BRm^2 + C - m)$, $K_2 = -4BR^2m^3 - 3BRCm + 2BRDm^2 + 7BRm^2 + 2CD + 3C - 2Dm - 3m + \frac{2D}{A\mu}(BR^2m^3 + BRCm - DBRm^2 - 2BRm^2 - CD + Dm)$, $K_3 = 2D(BRm^2 + C - m) \left[1 - \frac{D}{A\mu} \right] (2 - BRm)$.

Dalam menganalisis keberadaan bifurkasi Hopf, model dibagi menjadi tiga kasus dimana setiap kasus mengalami peningkatan nilai parameter waktu tunda pada populasi *prey* yang terinfeksi (τ). Pada kasus $\tau = \tau_k$ terjadi perubahan kestabilan titik interior dari spiral stabil menjadi spiral tidak stabil dan muncul limit cycle. Fenomena ini merupakan ciri dari bifurkasi Hopf. Dengan memilih parameter bifurkasi yang tepat, dianalisis stabilitas local dan bifurkasi Hopf. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan memvariasikan nilai waktu tunda. Ketika terjadi bifurkasi Hopf, grafik pada bidang solusi menunjukkan Gerakan osilasi yang konstan. Jika $\tau < \tau_k$, maka solusi system terkendali berada dalam keadaan seimbang. Kemudian Ketika $\tau > \tau_k$ solusi system terus berfluktuasi menyebabkan kondisi system tidak stabil.

REFERENCES

- [1] Ávila-Vales, E., Estrella-González, Á., & Rivero-Esquivel, E., 2017. Bifurcations of a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type III Functional Response and Michaelis-Menten Prey Harvesting. *Applied Mathematical Modelling*
- [2] Brauer, F. & Castillo-Chavez, C., 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer Science & Business Media: New York
- [3] Dawed, T., & Alemu, M., 2026. Bifurcation Analysis of Eco-Epidemiological Mathematical Model with Saturated Incidence Rate and General Holling Type Response Functions. *East African Journal of Biological and Computational Sciences*, Vol. 4, No. 1
- [4] Fei L, Lv, H., Wang, H., 2024. Bifurcation and hybrid control of a discrete eco-epidemiological model with Holling type-III. *PLoS ONE*, Vol. 19, No. 7
- [5] Firdiansyah, A. L., 2021. Effect of Prey Refuge and Harvesting on Dynamics of Eco-Epidemiological Model with Holling Type III Functional Response. *Jambura J. Math.*, Vol. 3, No. 1, Hal. 16-25
- [6] Li, S. & Liu, W., 2016. A Delayed Holling Type III Functional Response Predator-Prey System with Impulsive Perturbation on the Prey. *Advances in Difference Equations*, Vol. 2016, No. 42
- [7] Hussien, R. M., & Naji, R. K., 2023. The Dynamics of a Delayed Ecoepidemiological Model with Nonlinear Incidence Rate. *Hindawi. Journal of Applied Mathematics*, Issue 1
- [8] Morales, J., & Mena-Lorca, J., 2024. Eco-epidemiological predator -prey models: A review of models in ordinary differential equations. *Ecological Complexity*, Vol. 57
- [9] Murray, J. D., 2002. *Mathematical Biology An Introduction* (3rd ed). *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, Vol. 17
- [10] Pandey, S., Das, D., Ghosh, U. & Chakraborty, S., 2024. Bifurcation and onset of chaos in an eco-epidemiological system with the influence of time delay. *Chaos*, Vol. 34, Issue 6
- [11] Prakash, D. B., & Vamsi, D. K. K., 2025. Global dynamics and time-optimal control studies for additional food provided holling type-III mutually interfering prey-predator systems with applications to pest management. *SN Applied Sciences*, Vol. 7. No. 874
- [12] Sarwadi, S., et al., 2024. Direction and stability of Hopf bifurcation in an eco-epidemic model with disease in prey and predator gestation delay using Crowley-Martin functional response. *AIMS Mathematics*, Vol. 9, Issue 10, Hal. 27930-27954
- [13] Shaikh, A. A., Das, H., & Ali, N., 2017. Study of LG-Holling Type III Predator-Prey Model with Disease in Predator. *International Journal of Biomathematics*
- [14] Zhang, C., Liu, S., Huang, J., & Wang, W., 2023. Stability and Hopf bifurcation in an eco-epidemiological system with the cost of anti-predator behaviors. *Mathematical Biosciences Engineering*, Vol. 20, No. 5, Hal. 8146-8161
- [15] Zhang, H., et al., 2023. Stability Analysis of an Eco-Epidemiological Model with Time Delay and Holling Type-III Functional Response. *Journal of Nonlinear Modeling and Analysis*, Vol. 4, No. 3, Hal. 514-528
- [16] Zhang, H., Muhammadhaji, A., 2024. Dynamics of a Delayed Fractional-Order Predator-Prey Model with Cannibalism and Disease in Prey. *Fractal and Fractional*, Vol. 8, No. 6, Hal. 333