

Fuzzy Ideal and Fuzzy Filter on Ordered Groupoid

Ideal Fuzzy dan Filter Fuzzy pada Grupoid Terurut

Aminah Muliawati^{1*}, Saman Abdurrahman², Thresye³

^{1, 2, 3} Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat

Email: ¹2211011120004@mhs.ulm.ac.id, ²saman@ulm.ac.id, ³thresyetingiti.unlam@gmail.com.

*Corresponding Author

Received: 31 July 2026, revised: 31 August 2026, accepted: 1 September 2026

Abstract

Within fuzzy set theory, every element of a nonempty set is assigned a membership degree in the interval $[0, 1]$. With the development of fuzzy set theory, its concepts have been extended to algebraic structures, including ordered groupoids, leading to the investigation of fuzzy ideals and fuzzy filters. This research investigates properties of fuzzy ideals together with their correspondence to classical ideals through fuzzy membership functions. It also studies the characteristics of fuzzy filters and their connection with fuzzy prime ideals. This research uses literature review to examine the relationship between classical ideals and fuzzy ideals in ordered groupoids and by proving conditions for fuzzy subset to be a fuzzy ideal. Analysis also includes the characterization of fuzzy filters and their relation to fuzzy prime ideals through the concept of fuzzy subset complements. The findings reveal that the characteristic function induced by a nonempty subset forms a fuzzy ideal precisely when the subset itself is an ideal of the ordered groupoid. Therefore, fuzzy ideals provide a natural generalization of classical ideals while maintaining the ordering relation and binary operation defined on an ordered groupoid.

Keywords: Ordered Groupoid, Fuzzy Ideal, Fuzzy Filter, Fuzzy Membership Function, Fuzzy Prime Ideal.

Abstrak

Dalam teori himpunan fuzzy, setiap elemen pada himpunan tak kosong diberikan derajat keanggotaan yang bernilai pada interval $[0, 1]$. Dengan berkembangnya teori, konsep himpunan fuzzy dipadukan dengan struktur aljabar seperti grupoid, sehingga muncul kajian mengenai ideal fuzzy dan filter fuzzy pada grupoid terurut. Fokus penelitian ini adalah menganalisis sifat-sifat ideal fuzzy serta keterkaitannya dengan ideal klasik melalui fungsi keanggotaan fuzzy, serta mengkaji sifat-sifat filter fuzzy dan hubungannya dengan ideal prima fuzzy. Metode penelitian dilakukan dengan menelaah hubungan antara ideal klasik dan ideal fuzzy pada grupoid terurut serta membuktikan syarat agar suatu subset fuzzy menjadi ideal fuzzy. Analisis juga mencakup karakterisasi filter fuzzy dan hubungannya dengan ideal prima fuzzy melalui konsep komplemen subset fuzzy. Berdasarkan hasil analisis diperoleh bahwa suatu subset tidak kosong membentuk ideal fuzzy tepat ketika subset tersebut merupakan ideal pada grupoid terurut. Selain itu, diperoleh bahwa suatu subset fuzzy merupakan filter fuzzy tepat ketika komplemennya ideal prima fuzzy. Dengan demikian, ideal fuzzy dan filter fuzzy dapat dianggap sebagai perluasan konsep klasik yang mempertahankan sifat keterurutan dan operasi pada grupoid terurut.

Kata kunci: Grupoid Terurut, Ideal Fuzzy, Filter Fuzzy, Fungsi Keanggotaan Fuzzy, Ideal Prima Fuzzy.



1. PENDAHULUAN

Pada teori himpunan klasik, setiap elemen hanya dapat diklasifikasikan ke dalam dua keadaan, yakni sebagai anggota ataupun bukan anggota suatu himpunan. Konsep ini kurang mampu merepresentasikan objek yang memiliki batas keanggotaan tidak tegas. Keterbatasan tersebut melatarbelakangi berkembangnya teori himpunan *fuzzy*, yang merepresentasikan setiap elemen menggunakan derajat keanggotaan pada interval tertutup $[0, 1]$ [10]. Konsep himpunan *fuzzy* kemudian diterapkan ke berbagai struktur aljabar, salah satunya grupoid. Selanjutnya, konsep ini dikembangkan menjadi grupoid terurut, yaitu grupoid yang dilengkapi dengan relasi keterurutan parsial pada himpunannya [1].

Pengembangan teori himpunan *fuzzy* dalam struktur aljabar menghasilkan berbagai konsep, antara lain grup *fuzzy*, subgroupoid *fuzzy* dan ideal *fuzzy* [9]. Penelitian-penelitian berikutnya memperluas konsep tersebut pada semigrup terurut [2],[6],[7]. Pada grupoid terurut, diperkenalkan konsep ideal *fuzzy* dan filter *fuzzy* serta dikaji hubungan antara ideal klasik dan ideal *fuzzy* beserta beberapa sifat yang berkaitan dengan kedua konsep tersebut [4].

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, konsep ideal *fuzzy* dan filter *fuzzy* pada grupoid terurut masih dapat dikembangkan, terutama dalam representasi *subset* klasik ke dalam *subset fuzzy*, karena penelitian sebelumnya menggunakan fungsi karakteristik dengan nilai keanggotaan yang terbatas pada 0 dan 1, sehingga belum mempertimbangkan representasi dengan tingkat keanggotaan yang lebih umum. Selain itu, beberapa sifat pada struktur *fuzzy* masih dapat dikembangkan, salah satunya mengenai irisan dua atau lebih subgroupoid terurut *fuzzy* pada grupoid terurut. Hasil kajian ini diharapkan dapat memperluas pemahaman mengenai keterkaitan antara konsep klasik dan konsep *fuzzy* pada grupoid terurut.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini difokuskan pada representasi *subset* klasik pada grupoid terurut ke dalam bentuk *subset fuzzy* menggunakan fungsi keanggotaan dua tingkat, yaitu s untuk elemen yang berada dalam *subset* dan t untuk elemen yang berada di luar *subset*, dengan $s > t$. Selanjutnya dibuktikan bahwa irisan dua atau lebih subgroupoid terurut *fuzzy* tetap merupakan subgroupoid terurut *fuzzy*. Penelitian ini juga mengkaji hubungan antara ideal klasik dan ideal *fuzzy*, karakterisasi filter *fuzzy*, serta hubungan antara filter *fuzzy* dan ideal prima *fuzzy* melalui konsep komplemen *subset fuzzy*.

Penelitian ini diawali dengan mengkaji konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan grupoid terurut dan struktur *fuzzy* berdasarkan literatur yang relevan. Selanjutnya, *subset* klasik pada grupoid terurut direpresentasikan sebagai *subset fuzzy* melalui fungsi keanggotaan dua tingkat dan dibuktikan sifat keterurutan yang dipenuhi oleh representasi tersebut. Selain itu, dikaji sifat irisan subgroupoid terurut *fuzzy* pada grupoid terurut. Tahap berikutnya dilakukan pembuktian hubungan antara ideal klasik dan ideal *fuzzy*, hubungan antara filter klasik dan filter *fuzzy*, serta hubungan antara filter *fuzzy* dan ideal prima *fuzzy* melalui konsep komplemen *subset fuzzy*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grupoid Terurut

Konsep grupoid terurut, ideal, ideal prima, dan filter merupakan dasar yang diperlukan untuk mengkaji hubungan antara struktur klasik dan struktur *fuzzy* pada grupoid terurut. Konsep-konsep tersebut menjadi landasan dalam pembahasan ideal *fuzzy* dan filter *fuzzy* serta hubungan antara keduanya.

Definisi 2.1.1. [1] Diberikan $(G, *)$ merupakan sebuah grupoid dan " $\leq$ " adalah relasi urutan parsial (refleksif, antisimetris, dan transitif) pada G . Sistem $(G, *, \leq)$ disebut grupoid terurut jika $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G$, kondisi berikut terpenuhi, yakni

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \gamma * \alpha \leq \gamma * \beta \text{ dan } \alpha * \gamma \leq \beta * \gamma.$$

Definisi 2.1.2. [11] Diberikan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut dan $\emptyset \neq I \subseteq G$. Himpunan I dikatakan ideal jika memenuhi

1. $IG \subseteq I$ dan $GI \subseteq I$

2. $(\beta \in I \wedge \alpha \leq \beta) \Rightarrow \alpha \in I, \forall \alpha \in G$.

Definisi 2.1.3. [8] Diberikan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut. Suatu subgrupoid $F \subseteq G$ dikatakan filter jika memenuhi

1. $\alpha \leq \beta, \alpha \in F \Rightarrow \beta \in F, \forall \alpha, \beta \in G$

2. $\alpha * \beta \in F \Rightarrow \alpha, \beta \in F, \forall \alpha, \beta \in G$.

Definisi 2.1.4. [8] Diberikan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut. Suatu subgrupoid P dari G merupakan ideal prima dari G jika memenuhi

1. $PG \subseteq P$ dan $GP \subseteq P$ dan $(\beta \in P \wedge \alpha \leq \beta) \Rightarrow \alpha \in P, \forall \alpha, \beta \in G$

2. $\alpha * \beta \in P \Rightarrow \alpha \in P \vee \beta \in P, \forall \alpha, \beta \in G$.

2.2 Subset Fuzzy

Konsep subset fuzzy, subgrupoid terurut fuzzy, ideal fuzzy, ideal prima fuzzy, dan filter fuzzy diperlukan untuk mengkaji representasi subset klasik ke dalam bentuk fuzzy serta sifat dan hubungan struktur fuzzy pada grupoid terurut. Konsep-konsep tersebut menjadi dasar dalam pembahasan subgrupoid terurut fuzzy, hubungan ideal klasik dengan ideal fuzzy, serta hubungan filter fuzzy dengan ideal prima fuzzy.

Definisi 2.2.1. [3] Diberikan $G \neq \emptyset$. Subset fuzzy f pada G merupakan fungsi $f : G \rightarrow [0, 1]$, yang memberikan nilai keanggotaan setiap elemen $\alpha \in G$, yakni

$$f = \{(\alpha \mid f(\alpha)) \mid \alpha \in G\},$$

dengan $f(\alpha)$ menyatakan derajat keanggotaan α . Kumpulan semua subset fuzzy dari G disebut fuzzy power set dan dilambangkan dengan $\mathcal{FP}(G)$.

Definisi 2.2.2. [3] Komplemen subset fuzzy f pada suatu himpunan G dinotasikan dengan f^c dan didefinisikan sebagai

$$f^c(\alpha) = 1 - f(\alpha) \forall \alpha \in G.$$

Definisi 2.2.3. [3] Irisan dua subset fuzzy f dan g dari suatu himpunan G , yang dilambangkan dengan $f \cap g$, merupakan subset fuzzy dari G yang didefinisikan sebagai

$$(f \cap g)(\alpha) = \min\{f(\alpha), g(\alpha)\} \forall \alpha \in G.$$

Definisi 2.2.4. [5] Diberikan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut. Suatu fungsi $f : G \rightarrow [0, 1]$ disebut subgrupoid terurut fuzzy dari G jika $\forall \alpha, \beta \in G$ berlaku

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

2. $f(\alpha * \beta) \geq \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$

Definisi 2.2.5. [4] Diberikan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut. Sebuah subset fuzzy f dari G disebut ideal fuzzy dari G jika

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$;

2. $f(\alpha * \beta) \geq f(\alpha)$ untuk semua $\alpha, \beta \in G$

3. $f(\alpha * \beta) \geq f(\beta)$ untuk semua $\alpha, \beta \in G$

Pada saat kondisi (1) dan (2) dipenuhi maka f ideal kanan fuzzy dari G , dan saat kondisi (1) dan (3) dipenuhi maka f ideal kiri fuzzy dari G .

Definisi 2.2.6. [4] Diberikan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut. Subset fuzzy f dari G merupakan filter fuzzy dari G jika

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$

2. $f(\alpha * \beta) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$ untuk semua $\alpha, \beta \in G$.

Definisi 2.2.7. [8] Diberikan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut. Subset fuzzy f dari G merupakan ideal prima fuzzy dari G jika

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

2. $f(\alpha * \beta) = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$ untuk semua $\alpha, \beta \in G$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini menghasilkan representasi subset klasik sebagai subset fuzzy pada grupoid terurut beserta sifat-sifat yang diperoleh. Selanjutnya dikaji hubungan antara subset klasik dan subset fuzzy,

sifat irisan subgrupoid terurut *fuzzy*, hubungan antara ideal klasik dan ideal *fuzzy*, serta hubungan antara filter klasik, filter *fuzzy*, dan ideal prima *fuzzy*.

Pembahasan diawali dengan menunjukkan bahwa suatu *subset* klasik pada grupoid terurut dapat direpresentasikan sebagai *subset fuzzy* melalui fungsi keanggotaan dua tingkat. Representasi ini menjadi dasar untuk mengkaji sifat keterurutan pada *subset fuzzy*.

Proposisi 4.1. Misalkan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut dan $\emptyset \neq K \subseteq G$. Jika f adalah *subset fuzzy* dari G yang didefinisikan oleh

$$f(\alpha) = \begin{cases} s, & \alpha \in (K] \\ t, & \alpha \notin (K] \end{cases}$$

$\forall \alpha \in G$, dengan $s > t$, maka f memenuhi kondisi

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta), \forall \alpha, \beta \in G.$$

Bukti. Ambil $\alpha, \beta \in G$ dengan $\alpha \leq \beta$. Jika $\beta \in (K]$, maka berdasarkan definisi fungsi *fuzzy* diperoleh $f(\beta) = s$ dan karena $\beta \in (K] \exists \gamma \in K$ sehingga $\beta \leq \gamma$. Karena $\alpha \leq \beta$ dan $\beta \leq \gamma$ serta relasi $\leq$ bersifat transitif, maka diperoleh $\alpha \leq \gamma$, sehingga $\alpha \in (K]$. Akibatnya $f(\alpha) = s = f(\beta)$. Jika $\beta \notin (K]$, diperoleh $f(\beta) = t$. Karena $f(\alpha) \in \{s, t\}$ dan $s > t$ berlaku $f(\alpha) \geq t = f(\beta)$. Dengan demikian, $\forall \alpha, \beta \in G, \alpha \leq \beta$ berlaku $f(\alpha) \geq f(\beta)$. ■

Berdasarkan Proposisi 4.1 diperoleh bahwa representasi *subset* klasik melalui fungsi keanggotaan dua tingkat memenuhi sifat keterurutan. Selanjutnya akan dikaji syarat agar representasi tersebut berkaitan langsung dengan himpunan asalnya melalui kondisi $K = (K]$.

Proposisi 4.2. Misalkan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut dan $\emptyset \neq K \subseteq G$. Misalkan f adalah *subset fuzzy* dari G yang didefinisikan oleh

$$f(\alpha) = \begin{cases} s, & \alpha \in K \\ t, & \alpha \notin K \end{cases}$$

$\forall \alpha \in G$, dengan $s > t$, maka berlaku

$$K = (K] \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta), \forall \alpha, \beta \in G.$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan $K = (K]$. Berdasarkan Proposisi 4.1, fungsi *fuzzy* pada $(K]$ berlaku $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$. Karena $K = (K]$, sehingga hasil tersebut juga berlaku untuk fungsi *fuzzy* yang didefinisikan pada K .

$(\Leftarrow)$ Misalkan $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta) \forall \alpha, \beta \in G$. Ambil sebarang $\alpha \in (K] \exists \beta \in K$ sehingga $\alpha \leq \beta$. Karena $\beta \in K$, diperoleh $f(\beta) = s$ sehingga $f(\alpha) \geq f(\beta) = s$ yang berarti $f(\alpha) = s$. Akibatnya $\alpha \in K$. Oleh karena itu, $(K] \subseteq K$. Selanjutnya, dipilih sebarang $\alpha \in K$. Karena relasi $\leq$ bersifat refleksif, maka $\alpha \leq \alpha$. Akibatnya $\alpha \in (K]$. Dengan kata lain $K \subseteq (K]$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $K = (K]$. ■

Selain representasi *subset* klasik sebagai *subset fuzzy*, penelitian ini juga mengkaji salah satu sifat dasar pada subgrupoid terurut *fuzzy*, yaitu ketertutupan terhadap operasi irisan. Hasilnya ditunjukkan pada proposisi berikut.

Proposisi 4.3. Irisan $(\cap)$ dari dua subgrupoid terurut *fuzzy* pada grupoid terurut adalah subgrupoid terurut *fuzzy*.

Bukti. Misalkan $(G, *, \leq)$ adalah grupoid terurut. Ambil f dan g dua subgrupoid terurut *fuzzy* pada G . Didefinisikan fungsi $h : G \rightarrow [0, 1]$ sebagai irisan *fuzzy* dari f dan g , yaitu

$$h(\alpha) = (f \cap g)(\alpha) = \min\{f(\alpha), g(\alpha)\}, \forall \alpha \in G.$$

Akan dibuktikan bahwa irisan *fuzzy* h merupakan subgrupoid terurut *fuzzy* dari G . h harus memenuhi kedua syarat subgrupoid terurut *fuzzy* berikut.

1. Ambil $\alpha, \beta \in G$ dan $\alpha \leq \beta$. Mengingat f dan g adalah subgrupoid *fuzzy* terurut, diperoleh $f(\alpha) \geq f(\beta)$ dan $g(\alpha) \geq g(\beta)$.

$$\text{Akibatnya, } h(\alpha) = \min \{f(\alpha), g(\alpha)\} \geq \min \{f(\beta), g(\beta)\} = h(\beta)$$

Dengan demikian, $\forall \alpha, \beta \in G$ dengan $\alpha \leq \beta$ berlaku $h(\alpha) \geq h(\beta)$.

2. Karena f dan g adalah subgrupoid *fuzzy* pada G , maka $\forall \alpha, \beta \in G$ berlaku $f(\alpha * \beta) \geq \min \{f(\alpha), f(\beta)\}$ dan $g(\alpha * \beta) \geq \min \{g(\alpha), g(\beta)\}$.

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned} h(\alpha * \beta) &= \min \{f(\alpha * \beta), g(\alpha * \beta)\} \\ &\geq \min \{\min \{f(\alpha), f(\beta)\}, \min \{g(\alpha), g(\beta)\}\} \\ &= \min \{\min \{f(\alpha), g(\alpha)\}, \min \{f(\beta), g(\beta)\}\} \\ &= \min \{h(\alpha), h(\beta)\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $h(\alpha * \beta) \geq \min \{h(\alpha), h(\beta)\} \forall \alpha, \beta \in G$.

Oleh karena itu, karena h memenuhi kedua syarat subgrupoid terurut *fuzzy* maka berdasarkan Definisi 2.2.4 h merupakan subgrupoid terurut *fuzzy* pada grupoid terurut $(G, *, \leq)$. ■

Selanjutnya dikaji hubungan antara ideal klasik dan ideal *fuzzy* pada grupoid terurut. Hasil berikut menunjukkan bahwa suatu ideal kiri dapat direpresentasikan sebagai ideal kiri *fuzzy* melalui fungsi keanggotaan dua tingkat.

Proposisi 4.4. Misalkan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut dan $\emptyset \neq L \subseteq G$. Jika f adalah subset *fuzzy* dari G yang didefinisikan oleh

$$f(\alpha) = \begin{cases} s, & \alpha \in L \\ t, & \alpha \notin L \end{cases}$$

untuk setiap $\alpha \in G$, dengan $s > t$, maka

$$L \text{ ideal kiri} \Leftrightarrow f \text{ ideal kiri fuzzy.}$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Berdasarkan Definisi 2.2.5, f harus memenuhi kedua syarat ideal kiri *fuzzy* berikut.

1. Ambil $\alpha, \beta \in G$ dengan $\alpha \leq \beta$. Jika $\beta \notin L$, diperoleh $f(\beta) = t$. Karena $f(\alpha) \in \{s, t\}$ dan $s > t$ sehingga $f(\alpha) \geq t = f(\beta)$. Jika $\beta \in L$, maka $f(\beta) = s$. Karena L ideal kiri dan $\alpha \leq \beta$, diperoleh $\alpha \in L$. Akibatnya $f(\alpha) = s = f(\beta)$. Dengan demikian, berlaku $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$.
2. Ambil $\alpha, \beta \in G$
 - i. Misalkan $\alpha \in L$ dan $\beta \in L$, diperoleh $f(\alpha) = s = f(\beta)$. Karena L ideal kiri dari G , berlaku $\alpha * \beta \in L \forall \alpha, \beta \in L$, oleh karena itu $f(\alpha * \beta) = s$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) = s = f(\beta)$.
 - ii. Misalkan $\alpha \notin L$ dan $\beta \notin L$, maka berdasarkan definisi fungsi *fuzzy* diperoleh $f(\alpha) = t = f(\beta)$. Karena L ideal kiri maka tidak dapat dipastikan $\alpha * \beta \in L$ karena $\alpha, \beta \notin L$. sehingga diperoleh $f(\alpha * \beta) \in \{s, t\}$ dan diketahui $s > t$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) \geq t = f(\beta)$.
 - iii. Misalkan $\alpha \in L$ dan $\beta \notin L$ diperoleh $f(\alpha) = s$ dan $f(\beta) = t$. Karena L ideal kiri maka tidak dapat dipastikan $\alpha * \beta \in L$ karena $\beta \notin L$, sehingga diperoleh $f(\alpha * \beta) \in \{s, t\}$ dan diketahui $s > t$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) \geq t = f(\beta)$. Selanjutnya, misalkan $\alpha \notin L$ dan $\beta \in L$ diperoleh $f(\alpha) = t$ dan $f(\beta) = s$. Karena L ideal kiri, menurut Definisi 2.1.2 maka $\alpha * \beta \in L$ akibatnya $f(\alpha * \beta) = s = f(\beta)$.

Dari ketiga kasus, terbukti $f(\alpha * \beta) \geq f(\beta)$.

Dengan demikian, f memenuhi kedua syarat ideal kiri *fuzzy* dari G .

($\Leftarrow$) Berdasarkan Definisi 2.1.2, L harus memenuhi kedua syarat berikut.

1. Ambil $\alpha \in G$ dan $\beta \in L$, berdasarkan definisi fungsi *fuzzy* diperoleh $f(\beta) = s$. Karena f ideal kiri *fuzzy* dari G , maka $\forall \alpha, \beta \in G$, $f(\alpha * \beta) \geq f(\beta) = s$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) = s$, berdasarkan

definisi fungsi fuzzy diperoleh $\alpha * \beta \in L$. Dengan demikian, L memenuhi syarat ideal kiri pada grupoid terurut dari G .

2. Ambil $\alpha, \beta \in G$, $\alpha \leq \beta$ serta $\beta \in L$. Karena $\beta \in L$, maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\beta) = s$. Dari sifat ideal kiri fuzzy, pada Definisi 2.2.5 berlaku $f(\alpha) \geq f(\beta) = s$, diperoleh $f(\alpha) \geq s$, sehingga $f(\alpha) = s$. Berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $\alpha \in L$. Dengan demikian L memenuhi syarat keterurutan.

Dengan demikian, terbukti bahwa L ideal kiri $\Leftrightarrow f$ ideal kiri fuzzy. ■

Hasil berikut memperluas Proposisi 4.4 dengan menunjukkan kesesuaian antara ideal dan ideal fuzzy pada grupoid terurut melalui fungsi keanggotaan dua tingkat.

Proposisi 4.5. Misalkan $(G, *, \leq)$ grupoid terurut dan $\emptyset \neq I \subseteq G$. Misalkan f adalah subset fuzzy dari G yang didefinisikan oleh

$$f(\alpha) = \begin{cases} s, & \alpha \in I \\ t, & \alpha \notin I \end{cases}$$

untuk setiap $\alpha \in G$, dengan $s > t$, maka

$$I \text{ ideal} \Leftrightarrow f \text{ ideal fuzzy.}$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Berdasarkan Definisi 2.2.5, f harus memenuhi tiga syarat berikut.

1. Karena setiap ideal merupakan ideal kiri, maka berdasarkan Proposisi 4.4 diperoleh $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$.
2. Ambil sebarang $\alpha, \beta \in G$
 - i. Misalkan $\alpha \in I$ dan $\beta \in I$, maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha) = s = f(\beta)$. Karena I ideal kanan dari G , menurut Definisi 2.1.2 berlaku $\alpha * \beta \in I \forall \alpha, \beta \in I$, oleh karena itu $f(\alpha * \beta) = s$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) = s = f(\alpha)$.
 - ii. Misalkan $\alpha \notin I$ dan $\beta \notin I$, berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha) = t = f(\beta)$. Karena I ideal kanan maka tidak dapat dipastikan $\alpha * \beta \in I$ karena $\alpha, \beta \notin I$, sehingga diperoleh $f(\alpha * \beta) \in \{s, t\}$ dan diketahui $s > t$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) \geq t = f(\alpha)$.
 - iii. Misalkan $\alpha \notin I$ dan $\beta \in I$ diperoleh $f(\alpha) = t$ dan $f(\beta) = s$. Karena I ideal kanan, menurut Definisi 2.1.2 maka tidak dapat dipastikan $\alpha * \beta \in I$ karena $\alpha \notin I$, sehingga diperoleh $f(\alpha * \beta) \in \{s, t\}$ dan diketahui $s > t$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) \geq t = f(\alpha)$. Selanjutnya, andaikan $\alpha \in I$ dan $\beta \notin I$ maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha) = s$ dan $f(\beta) \in \{s, t\}$. Karena I ideal kanan maka $\alpha * \beta \in I$ akibatnya $f(\alpha * \beta) = s = f(\alpha)$.

Dari ketiga kasus, terbukti $f(\alpha * \beta) \geq f(\alpha)$.

3. Karena setiap ideal merupakan ideal kiri, maka berdasarkan Proposisi 4.4 diperoleh $f(\alpha * \beta) \geq f(\beta)$.

($\Leftarrow$) Berdasarkan Definisi 2.1.2, I harus memenuhi tiga syarat berikut

1. Ambil $\alpha \in I$ dan $\beta \in G$, maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha) = s$. Karena f ideal kanan fuzzy dari G , maka menurut Definisi 2.2.5 $\forall \alpha, \beta \in G$, $f(\alpha * \beta) \geq f(\alpha) = s$. Akibatnya $f(\alpha * \beta) = s$, berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $\alpha * \beta \in I$. Dengan demikian, I ideal kanan dari G .
2. Karena setiap ideal fuzzy merupakan ideal kiri fuzzy, maka berdasarkan Proposisi 4.4 diperoleh $G * I \subseteq I$.
3. Karena setiap ideal fuzzy merupakan ideal kiri fuzzy, maka berdasarkan Proposisi 4.4 diperoleh $\beta \in I, \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \in I$.

Jadi, I ideal $\Leftrightarrow f$ ideal fuzzy. ■

Selanjutnya, hubungan antara filter klasik dan filter fuzzy ditunjukkan pada proposisi berikut.

Proposisi 4.6. Misalkan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut dan $\emptyset \neq F \subseteq G$. Misalkan f adalah subset fuzzy dari G yang didefinisikan oleh

$$f(\alpha) = \begin{cases} s, & \alpha \in F \\ t, & \alpha \notin F \end{cases}$$

untuk setiap $\alpha \in G$, dengan $s > t$, maka

$$F \text{ filter} \Leftrightarrow f \text{ filter fuzzy.}$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan F adalah filter dari G . Berdasarkan Definisi 2.2.6, f harus memenuhi kedua syarat filter fuzzy berikut.

1. Ambil $\alpha, \beta \in G$, $\alpha \leq \beta$. Jika $\alpha \notin F$, $f(\alpha) = t$. Karena $f(\beta) \in \{s, t\}$, sehingga berlaku $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Jika $\alpha \in F$, $f(\alpha) = s$. Karena F filter dan $\alpha \in F$ diperoleh $\beta \in F$. Akibatnya $f(\alpha) = f(\beta) = s$, sehingga $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Dengan demikian, $\forall \alpha, \beta \in G$ dengan $\alpha \leq \beta$, berlaku $f(\alpha) \leq f(\beta)$.
2. Ambil sebarang $\alpha, \beta \in G$. Misalkan $\alpha * \beta \notin F$ maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha * \beta) = t$. Karena F filter dan $\alpha * \beta \notin F$ mengimplikasikan $\alpha \notin F$ atau $\beta \notin F$ sehingga $f(\alpha) = t$ atau $f(\beta) = t$. Akibatnya, $\min\{f(\alpha), f(\beta)\} = t = f(\alpha * \beta)$. Misalkan $\alpha * \beta \in F$ maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha * \beta) = s$. Karena F filter dan $\alpha * \beta \in F$ menurut Definisi 2.1.3 berlaku $\alpha \in F$ dan $\beta \in F$ sehingga $f(\alpha) = f(\beta) = f(\alpha * \beta) = s$. Oleh karena itu, $\min\{f(\alpha), f(\beta)\} = s = f(\alpha * \beta)$. Dengan demikian, $f(\alpha * \beta) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$.

Berdasarkan Definisi 2.2.6 diperoleh bahwa f merupakan filter fuzzy dari G .

$(\Leftarrow)$ Misalkan f merupakan filter fuzzy dari G . Berdasarkan Definisi 2.1.3, F harus memenuhi kedua syarat filter.

1. Ambil $\alpha, \beta \in G$, $\alpha * \beta \in F$, maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha * \beta) = s$. Karena f filter fuzzy maka menurut Definisi 2.2.6 berlaku $f(\alpha * \beta) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$. Akibatnya, $\min\{f(\alpha), f(\beta)\} = s$ sehingga $f(\alpha) = f(\beta) = s$ yang berarti $\alpha, \beta \in F$.
2. Misalkan $\alpha \in F$ dan $\beta \in G$ dengan $\alpha \leq \beta$ maka berdasarkan definisi fungsi fuzzy diperoleh $f(\alpha) = s$ dan $f(\beta) \in \{s, t\}$. Selanjutnya, karena f filter fuzzy dan $\alpha \leq \beta$ berlaku $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Karena $f(\alpha) = s$ dan $f(\beta) \in \{s, t\}$, diperoleh $f(\beta) = s$ sehingga $\beta \in F$.

Jadi, F filter. ■

Selanjutnya, ditunjukkan hubungan antara filter pada grupoid terurut dengan ideal prima melalui komplemen himpunan sebagai berikut.

Proposisi 4.7. Misalkan $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut dan $\emptyset \neq F \subseteq G$, maka

$$F \text{ filter} \Leftrightarrow G \setminus F = \emptyset \text{ atau } G \setminus F \text{ ideal prima.}$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan F filter dari grupoid G dengan $F \subset G$, sehingga $G \setminus F \neq \emptyset$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $G \setminus F$ merupakan ideal prima dari G .

Pembuktian diawali dengan menunjukkan bahwa $G \setminus F$ subgrupoid dari G . Ambil $\alpha, \beta \in G \setminus F$. Andaikan $\alpha * \beta \in F$. Karena F filter maka diperoleh $\alpha \in F$ dan $\beta \in F$. Hal ini bertentangan dengan $\alpha, \beta \in G \setminus F$. Jadi, $\alpha * \beta \notin F$ sehingga $\alpha * \beta \in G \setminus F$. Dengan demikian, diperoleh $G \setminus F$ merupakan subgrupoid dari G . Selanjutnya, dibuktikan $G \setminus F$ memenuhi syarat ideal prima dari G .

1. Ambil $\beta \in G \setminus F$ dan $\alpha \in G$ dengan $\alpha \leq \beta$. Untuk kondisi $\alpha \in F$ dan F adalah filter dengan $\alpha \leq \beta$ maka $\beta \in F$. Hal ini bertentangan dengan $\beta \in G \setminus F$. Jadi haruslah $\alpha \notin F$ sehingga $\alpha \in G \setminus F$.
2. Ambil $\alpha, \beta \in G$ dengan $\alpha * \beta \in G \setminus F$. Andaikan sebaliknya, yaitu $\alpha \notin G \setminus F$ dan $\beta \notin G \setminus F$. Karena $\alpha, \beta \in G$ maka diperoleh $\alpha \in F$ dan $\beta \in F$. Karena F filter, berdasarkan Definisi 2.1.3 diperoleh $\alpha * \beta \in F$. Kontradiksi dengan asumsi bahwa $\alpha * \beta \in G \setminus F$. Oleh karena itu, pengandaian tersebut salah. Dengan demikian, paling sedikit salah satu dari α atau β tidak berada di F , yaitu $\alpha \in G \setminus F$ atau $\beta \in G \setminus F$.

Jadi, $G \setminus F$ merupakan subgrupoid dari G yang memenuhi kedua syarat pada Definisi 2.1.4. Oleh karena itu, $G \setminus F$ merupakan ideal prima dari G .

($\Leftarrow$) Misalkan $G \setminus F = \emptyset$ atau $G \setminus F$ adalah ideal prima dari G . Akan dibuktikan F filter dari G .

Untuk kondisi $G \setminus F = \emptyset$, diperoleh $F = G$. Akibatnya, $\forall \alpha, \beta \in G$ berlaku $\alpha * \beta \in G = F$ sehingga F merupakan subgrupoid dari G . Ambil $\alpha \in F$ dan $\beta \in G$ dengan $\alpha \leq \beta$, karena $F = G$ maka $\beta \in F$. Selanjutnya, jika $\alpha * \beta \in F$ dan karena $F \setminus G$ diperoleh $\alpha \in F$ dan $\beta \in F$. Dengan demikian, F merupakan filter dari G .

Selanjutnya, untuk kondisi $G \setminus F \neq \emptyset$ sedemikian sehingga $G \setminus F$ adalah ideal prima dari G . Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa F merupakan subgrupoid dari G . Ambil sebarang $\alpha, \beta \in F$. Andaikan $\alpha * \beta \notin F \Rightarrow \alpha * \beta \in G \setminus F$. Karena $G \setminus F$ ideal prima, diperoleh $\alpha \in G \setminus F$ atau $\beta \in G \setminus F$. Hal ini bertentangan dengan $\alpha, \beta \in F$. Jadi $\alpha * \beta \in F$. Dengan demikian, F merupakan subgrupoid dari G .

1. Ambil $\alpha \in F \subseteq G$, $\beta \in G$ serta $\alpha \leq \beta$. Mengingat $\beta \in G$ diperoleh $\beta \in F$ atau $\beta \notin F$. Pada kondisi $\beta \notin F$ maka $\beta \in G \setminus F$. Karena $G \setminus F$ adalah ideal prima dan $\alpha \leq \beta$ maka $\alpha \in G \setminus F$. Hal ini bertentangan dengan $\alpha \in F$. Jadi haruslah $\beta \in F$.
2. Ambil $\alpha, \beta \in G$ sedemikian sehingga $\alpha * \beta \in F$. Misalkan $\alpha \notin F$ diperoleh $\alpha \in G \setminus F$. Karena $G \setminus F$ ideal dan $(G \setminus F)G \subseteq G \setminus F$ dengan $\beta \in G$ diperoleh $\alpha * \beta \in G \setminus F$. Hal ini berarti $\alpha * \beta \notin F$, yang bertentangan dengan asumsi bahwa $\alpha * \beta \in F$. Oleh karena itu, harus berlaku $\alpha \in F$. Selanjutnya, misalkan $\beta \notin F$ maka $\beta \in G \setminus F$. Karena $G \setminus F$ ideal prima, maka berdasarkan sifat ideal prima diperoleh $\alpha * \beta \in G \setminus F$. Akibatnya $\alpha * \beta \notin F$, yang bertentangan terhadap asumsi bahwa $\alpha * \beta \in F$. Oleh karena itu, harus berlaku $\beta \in F$. Diperoleh, jika $\alpha * \beta \in F$, maka $\alpha \in F$ dan $\beta \in F$.

Jadi, F subgrupoid yang memenuhi kedua syarat pada Definisi 2.1.3. Dengan demikian, F merupakan filter dari G . ■

Sebelum membahas hubungan antara filter fuzzy dan ideal prima fuzzy, terlebih dahulu ditunjukkan hubungan antara suatu subset fuzzy dan komplementnya yang menjadi dasar pada pembuktian berikut.

Proposisi 4.8. Misalkan G grupoid dan f subset fuzzy dari G . Pernyataan berikut ekuivalen:

1. $f(\alpha * \beta) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$ untuk semua $\alpha, \beta \in G$
2. $f^c(\alpha * \beta) = \max\{f^c(\alpha), f^c(\beta)\}$ untuk semua $\alpha, \beta \in G$.

Bukti. (1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} f^c(\alpha * \beta) &= 1 - f(\alpha * \beta) \\ &= 1 - \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \\ &= \max\{1 - f(\alpha), 1 - f(\beta)\} \\ &= \max\{f^c(\alpha), f^c(\beta)\} \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$$\begin{aligned} f(\alpha * \beta) &= 1 - f^c(\alpha * \beta) \\ &= 1 - \max\{f^c(\alpha), f^c(\beta)\} \\ &= 1 - \max\{1 - f(\alpha), 1 - f(\beta)\} \\ &= \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Berdasarkan Proposisi 4.8, diperoleh bahwa sifat operasi pada suatu subset fuzzy berhubungan langsung dengan sifat operasi pada komplemen fuzzy-nya. Hasil tersebut digunakan untuk menunjukkan hubungan antara filter fuzzy dan ideal prima fuzzy pada proposisi berikut.

Proposisi 4.9. Jika $(G, *, \leq)$ merupakan grupoid terurut dan $f : G \rightarrow [0, 1]$, maka f filter fuzzy $\Leftrightarrow f^c$ ideal prima fuzzy.

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan f filter fuzzy dari G . Berdasarkan Definisi 2.2.7 f^c harus memenuhi kedua syarat ideal prima fuzzy berikut.

1. Misalkan $\alpha, \beta \in G$ dan $\alpha \leq \beta$. Karena f filter fuzzy, maka berlaku $f(\alpha) \leq f(\beta)$, dan menurut Definisi 2.2.2 diperoleh $f^c(\alpha) = 1 - f(\alpha) \geq 1 - f(\beta) = f^c(\beta)$.
 2. Selanjutnya, misalkan $\alpha, \beta \in G$. Karena f filter fuzzy, diperoleh $f(\alpha * \beta) \geq \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$. Dengan menggunakan Proposisi 4.8, diperoleh $f^c(\alpha * \beta) = \max\{f^c(\alpha), f^c(\beta)\}$. Sehingga, f^c ideal prima fuzzy dari G .
- ($\Leftarrow$) Misalkan f^c ideal prima fuzzy dari G . Akan dibuktikan f filter fuzzy dari G . Berdasarkan Definisi 2.2.6 f harus memenuhi kedua syarat filter fuzzy berikut.
1. Misalkan $\alpha, \beta \in G$ dan $\alpha \leq \beta$. Karena f^c ideal prima fuzzy, maka berlaku $f^c(\alpha) \geq f^c(\beta)$. Dari Definisi 2.2.2 diperoleh $f^c(\alpha) = 1 - f(\alpha) \geq 1 - f(\beta) = f^c(\beta)$, sehingga $f(\alpha) \leq f(\beta)$.
 2. Selanjutnya, misalkan $\alpha, \beta \in G$. Karena f^c ideal prima fuzzy, diperoleh $f^c(\alpha * \beta) = \max\{f^c(\alpha), f^c(\beta)\}$. Dengan menggunakan Proposisi 4.8, diperoleh $f(\alpha * \beta) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$. Sehingga, f filter fuzzy dari G . ■

5. KESIMPULAN

Subset klasik pada grupoid terurut dapat direpresentasikan sebagai subset fuzzy melalui fungsi keanggotaan dua tingkat dengan $s > t$. Subset fuzzy yang didefinisikan berdasarkan suatu himpunan K atau himpunan bawah $(K]$ memenuhi sifat keterurutan, yaitu $f(\alpha) \geq f(\beta)$ setiap kali $\alpha \leq \beta$ dan sifat ini berkaitan dengan kondisi $K = [K]$. Selain itu, irisan dari dua subgrupoid terurut fuzzy pada grupoid terurut juga tetap menghasilkan subgrupoid terurut fuzzy. Di sisi lain, terdapat kesesuaian antara himpunan biasa dan subset fuzzy, di mana suatu himpunan dikatakan sebagai ideal (kiri, kanan, atau dua sisi) melalui subset fuzzy yang dibentuk darinya merupakan ideal fuzzy yang bersesuaian.

Terdapat hubungan antara filter klasik dan filter fuzzy pada grupoid terurut, yaitu suatu himpunan merupakan filter jika dan hanya jika subset fuzzy yang dibentuk darinya merupakan filter fuzzy. Selain itu, hubungan antara filter fuzzy dan ideal prima fuzzy diperoleh melalui operasi komplemen subset fuzzy, yaitu subset fuzzy merupakan filter fuzzy jika dan hanya jika komplemennya ideal prima fuzzy.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa konsep fuzzy pada grupoid terurut dapat dikaji melalui representasi subset klasik dengan fungsi keanggotaan dua tingkat, sifat irisan dua subgrupoid terurut fuzzy, serta hubungan antara ideal, filter, dan ideal prima fuzzy. Hasil ini menunjukkan bahwa kajian tersebut dapat diterapkan pada grupoid terurut tanpa mensyaratkan sifat asosiatif pada operasi binernya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Al-Tahan, M., Davvaz, B., & Parimala, M., 2020. A Note on Single Valued Neutrosophic Sets in Ordered Groupoids. *International Journal of Neutrosophic Science*, 10(2), 73–83. <https://doi.org/10.54216/IJNS.0100201>
- [2] Jun, Y. B., Tinpun, K., & Lekkoksung, N., 2024. Exploring Regularities of Ordered Semigroups Through Generalized Fuzzy Ideals. *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, 24(2), 141–152. <https://doi.org/10.5391/IJFIS.2024.24.2.141>
- [3] Kandasamy, W. B. V., 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press.
- [4] Kehayopulu, N., & Tsingelis, M., 2002. Fuzzy Sets in Ordered Groupoids. *Semigroup Forum*, 65(1), 128–132. <https://doi.org/10.1007/s002330010079>
- [5] Kehayopulu, N., & Tsingelis, M., 2005. Fuzzy Bi-Ideals in Ordered Semigroups. *Information Sciences*, 171(1–3), 13–28. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2004.03.015>
- [6] Khamrot, P., Iampan, A., & Gaketem, T., 2025. Fuzzy (m, n) -Ideals and n -Interior Ideals in Ordered Semigroups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 18(1), 1–12. <https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v18i1.5596>
- [7] Lekkoksung, S., Davvaz, B., & Lekkoksung, N., 2024. An Application of Generalized Fuzzy Ideals in Ordered Semigroups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 17(4), 2962–2984. <https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v17i4.5460>

- [8] Rao, M. M. K., 2024. Fuzzy Filters in Ordered Semirings. *Annals of Communications in Mathematics*, 7(2), 114–127. <https://doi.org/10.62072/acm.2024.070205>
- [9] Rosenfeld, A., 1971. Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35(3), 512–517. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(71\)90199-5](https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90199-5)
- [10] Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [11] Zhu, Q. S., 2009. On left weakly prime, left weakly semiprime ideals in ordered semigroups. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 30(2), 189–194. <https://doi.org/10.1134/S1995080209020127>