J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
e-ISSN: 2614-8811
Vol.16, No. 1, 33-39, July 2019
doi: 10.20956/jmsk.v16i1.5943

Nilai Eigen Matriks Quaternion

[1*]Susi Ekawati, [2*]Amir Kamal Amir, [3*]Mawardi Bahri

Abstract

According to Zhang (2007), if $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is a quaternion matrix with $bc = 0$ and λ is the left eigenvalue of A, then $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$. In this paper will be shown, if $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is a quaternion matrix with $bc \neq 0$ and λ_1, λ_2 is the left eigenvalue of A, then $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d)| = 0$.

Keywords : Quaternion, Cayley Determinant, Left Eigenvalue

Abstrak

Menurut Zhang (2007), jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc = 0$ dan λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan tiga hal. Pertama, jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc \neq 0$ dan λ_1, λ_2 adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d)| = 0$.

Kata Kunci : Quaternion, Determinan Cayley, Nilai Eigen Kiri

1. Pendahuluan

Quaternion merupakan perluasan dari bilangan-bilangan kompleks yang tidak komutatif dan diterapkan dalam mekanika tiga dimensi. Sebagai himpunan, quaternion dilambangkan sebagai $\mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ memiliki tiga jenis operasi yaitu penjumlahan, perkalian skalar, dan perkalian quaternion. Elemen-elemen quaternion disimbolkan sebagai $1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ adalah komponen imajiner) dan dapat dituliskan sebagai kombinasi linier : $a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ dimana a, b, c, dan d adalah bilangan riil. Persamaan-persamaan lainnya adalah $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, dan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$[5]

Telah diketahui bahwa jika $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan riil dengan ordo 2×2, maka determinan dari matriks A adalah $a_1 b_2 - b_1 a_2$ dan jika $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan riil dengan ordo 3×3, maka determinan dari matriks B adalah $a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$. Sedangkan berdasarkan definisi determinan Cayley, jika $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan quaternion dengan ordo 2×2, maka determinan dari matriks A adalah $a_1 b_2 - a_2 b_1$ dan jika

**Program Studi Pascasarjana (S2) Matematika, FMIPA-UNHAS*
Email address: [1]Susiekawati31@gmail.com, [2]amirkamalamir@yahoo.com, [3]mawardibahri@gmail.com

$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan quaternion dengan ordo 3×3, maka determinan dari matriks B adalah $a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$. [1]

[6] mengatakan bahwa misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc = 0$. Jika λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$. [3] mengatakan bahwa misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H})$ dengan $bc \neq 0$. Jika $\lambda \in \sigma_l(A)$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a| = |b|$ jika dan hanya jika $|\lambda - b| = |c|$.

Misalkan $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ disebut nilai eigen kiri dari A jika $Ax = \lambda x$ untuk beberapa $x \in \mathbb{H}^n$ yang tak nol atau ekuivalen dengan matriks $(A - \lambda I)$ yang tidak memiliki invers, sehingga $(A - \lambda I)x = 0$. Kemudian jika misalkan $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ disebut nilai eigen kanan dari A jika $Ax = x\lambda$ untuk beberapa $x \in \mathbb{H}^n$ yang tak nol.[6]

2. TinjauanPustaka

Di dalam [2] Quaternion merupakan kombinasi linear skalar riil dan tiga satuan imaginer ortogonal (dilambangkan dengan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$) dengan koefisien riil yang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} | q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

dimana elemen $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$ memenuhi aturan perkalian Hamilton berikut ini :

$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$;

$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$;

$\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$.

Sifat – sifat operasi pada bilangan quaternion :

a. Operasi penjumlahan dan perkalian

Diberikan dua buah quaternion yaitu :

$$a = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$
$$b = b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

dengan $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$**.**

Penjumlahan dua buah quternion tersebut adalah

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) + (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

dan

Perkalian dua buah quaternion adalah

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_0(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + a_1\boldsymbol{i}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + a_2\boldsymbol{j}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + \\ &\quad b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + a_3\boldsymbol{k}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k}) + \left(a_1b_0\boldsymbol{i} + a_1b_1\boldsymbol{i}^2 + a_1b_2\boldsymbol{ij} + a_1b_3\boldsymbol{ik}\right) + \\ &\quad \left(a_2b_0\boldsymbol{j} + a_2b_1\boldsymbol{ji} + a_2b_2\boldsymbol{j}^2 + a_2b_3\boldsymbol{jk}\right) + \left(a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{ki} + a_3b_2\boldsymbol{kj} + \right. \\ &\quad \left. a_3b_3\boldsymbol{k}^2\right) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k} + a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1 + a_1b_2k - a_1b_3j + a_2b_0\boldsymbol{j} - \\ &\quad a_2b_1\boldsymbol{k} - a_2b_2 + a_2b_3\boldsymbol{i} + a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i} - a_3b_3 \end{aligned}$$

$= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} +$
$(a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)\boldsymbol{k}.$

b. Konjugat dari Quaternion

Jika $a = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, maka konjugat dari a adalah

$$\bar{a} = a_0 - a_1\boldsymbol{i} - a_2\boldsymbol{j} - a_3\boldsymbol{k}$$

c. Norm dari Quaternion

Norm dari quaternion diperoleh dari modulus perkalian quaternion dengan konjugatnya $\bar{a}$.

$$|a| = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

d. Invers dari Quaternion

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$$

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom dinyatakan dengan

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks tidak mempunyai nilai tetapi ukuran. Ukuran matriks disebut ordo yang ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom, maka matriks A berordo $m \times n$.

Jenis-jenis matriks sebagai berikut :

a. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks di mana semua unsurnya nol.

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, yang dinyatakan dengan $A_{m\times n}$, dimana $m = n$, dapat ditulis dengan $A_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n}$. Matriks berordo $n \times n$ disebut juga bujur sangkar ordo n. Dalam hal ini hanya matriks bujur sangkar yang mempunyai elemen diagonal utama dan elemen diagonal kedua.

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c. Matriks Segitiga

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di bawah elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah (a_{ij}) dengan $a_{ij} = 0; \forall i > j$.

Contoh : $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di atas elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah $\left(a_{ij}\right)$ dengan $a_{ij} = 0; \forall i < j$.

Contoh : $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

d. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks bujur sangkar dengan semua elemen-elemen yang bukan elemen diagonal utama adalah nol. Dengan kata lain suatu matriks A berorde $n \times n$ disebut matriks diagonal, jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh : $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

e. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks skalar dengan elemen-elemen diagonal utama semuanya sama dengan satu. Bentuk umum matriks identitas dinyatakan dengan $A = \left(a_{ij}\right)$ dimana $i = j = 1,2, \dots, n$ dengan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh : $A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

f. Matriks Quaternion

Matriks quaternion adalah matriks yang entri-entrinya adalah bilangan quaternion.

Contoh : $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 - \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} & 2 - \boldsymbol{k} \\ 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} & 3 + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \end{pmatrix}$.

Determinan adalah susunan bilangan atau simbol yang berbentuk bujur sangkar dan disajikan di antara dua garis tegak. Determinan sebagai satu kesatuan yang mewakili suatu nilai dari matriks yang diberikan. Determinan A dinotasikan dengan $|A|$ atau $\det(A)$.

Jika diketahui matriks A adalah bilangan riil yang berordo 2×2

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

maka determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

[1] Definisi determinan quaternion oleh Cayley dinotasikan dengan Cdet adalah sebagai berikut

- $\mathrm{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

- $\text{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$

Contoh :
Carilah determinan dari matriks A berikut
$$A = \begin{pmatrix} i+j-2k & 2i+j \\ 3i+j & j-k \end{pmatrix}.$$
Penyelesaian. Berdasarkan definisi determinan matriks quaternion oleh Cayley diperoleh
$$\begin{aligned} \text{Cdet} &= (i+j-2k)(j-k) - (3i+j)(2i+j) \\ &= (-3+i+j+k) - (-7+k) \\ &= 4+i+j. \end{aligned}$$

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. λ disebut suatu nilai eigen dari A jika terdapat suatu vektor tak nol x sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. Persamaan $Ax = \lambda x$ dapat dituliskan dalam bentuk
$$(A - \lambda I)x = 0. \qquad \text{(i)}$$
Persamaan (i) akan mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika $A - \lambda I$ singular atau secara ekuivalen
$$\det(A - \lambda I) = 0. \qquad \text{(ii)}$$
Jika determinan pada Persamaan (ii) diuraikan, maka diperoleh suatu polinomial berderajat n dalam peubah λ
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$
Polinomial ini disebut polinomial karakteristik dan Persamaan (ii) disebut persamaan karakteristik untuk matriks A. Akar dari polinomial karakteristik adalah nilai eigen dari A. [4]

3. Nilai Eigen Matriks Quaternion

Diketahui matriks quaternion sebagai berikut
$$A = \begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$
Nilai Eigen
$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0$$
$$\text{Det}\left(\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}-\lambda & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
Berdasarkan definisi determinan matriks quaternion oleh Cayley diperoleh
$$\begin{aligned} \text{Cdet} &= (1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}-\lambda)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}-\lambda) - (2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ &= \big(\lambda^2 - (1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\lambda - \lambda(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) + 2(-1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\big) - 4(-1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

Jika $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\boldsymbol{i} + \lambda_2\boldsymbol{j} + \lambda_3\boldsymbol{k}$, maka
$$\begin{aligned} \text{Cdet} = {} & (\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_0\lambda_1\boldsymbol{i} + 2\lambda_0\lambda_2\boldsymbol{j} + 2\lambda_0\lambda_3\boldsymbol{k}) - 2(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - \\ & 2(\lambda_0 + \lambda_1)\boldsymbol{i} + 2(\lambda_0 - \lambda_2)\boldsymbol{j} - 2(\lambda_0 + \lambda_3)\boldsymbol{k} - 2(-1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) = 0 \end{aligned}$$
Sehingga diperoleh persamaan
- $\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 2(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) + 2 = 0$
- $2\lambda_0\lambda_1 - 2(\lambda_0 + \lambda_1) - 2 = 0$
- $2\lambda_0\lambda_2 + 2(\lambda_0 - \lambda_2) + 2 = 0$

- $2\lambda_0\lambda_3 - 2(\lambda_0 + \lambda_3) - 2 = 0$

Dari persamaan tersebut diperoleh nilai eigen

$\lambda_1 = \left(1+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

$\lambda_2 = \left(1-\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$.

Vektor Eigen

$(A-\lambda I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}-\lambda & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = \left(1+\sqrt{2}\right)(1+i-j+k)$, maka

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & -\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$-\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})x_1 + (1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})x_2 = 0 \rightarrow \sqrt{2}x_1 = x_2$

Maka diperoleh vektor eigen : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Uji

$Ax = \lambda x$

$$\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left(1+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(1+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ \left(2+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ \left(2+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Untuk $\lambda = \left(1-\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, maka

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & \sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} \sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})x_1 + (1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})x_2 = 0 \rightarrow \sqrt{2}x_1 = -x_2$

Maka diperoleh vektor eigen : $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Uji

$Ax = \lambda x$

$$\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left(1-\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(-1+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ \left(-2+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-1+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ \left(-2+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Kemudian perhatikan bahwa

- $(\lambda_1 - a) = \left(1+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) - (1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$
  $= \sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$
- $(\lambda_2 - d) = \left(1-\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) - (1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

$$= -\sqrt{2}(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

Sehingga jelas bahwa $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d)| = 0$

DaftarPustaka

[1] Aslaksen, H.,1991. Quaternionic Determinants. *Mathematics Subject Classification*, Singapore.

[2] Djuddin, J., 2015. *Bentuk Pusat dan Ideal Gelanggang Polinom Miring atas Quaternion*. Jurusan Matematika Program Pascasarjana. Universitas Hasanuddin Makassar.

[3] Farid, F.O., Qing-Wen, W., dan Zhang, F., 2011. On the eigenvalues of quaternion matrices. *Linear and Multilinier Algebra,* **59** : 451 – 473.

[4] Hermana, H., 2016. *Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Circulant, Circulant Simetrik, dan Block Circulant*. Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Institute Pertanian Bogor.

[5] Wikipedia., 2017. *Quaternion*. https://id.wikipedia.org/wiki/Kuaternion.

[6] Zhang, F., 2007. Gersgorin type theorems for quaternionic matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **424** : 139-153.