J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 16, No. 2, 208-218 Januari 2020
DOI: 10.20956/jmsk.v%vi%i.7701

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Eksistensi Dan Ketunggalan Titik Tetap pada Pemetaan Kontraksi Tergeneralisasi dalam Ruang b-Metrik

[1]Afif Budi Andy B., [1]Naimah Aris, [1]Budi Nurwahyu

Abstract

A *b*-metric space is generalization of the metric space. One interesting topic in the b-metric space is the fixed point. In this article, we proved existence and uniqueness of the fixed points for some generalized contraction in the b-metric space, including the generalization of rational contraction mapping. Some examples are given to support the theory of fixed points in the b-metric space.

Keywords: metric space, b-metric space, fixed point, generalization contraction mapping, rational contraction mapping

Abstrak

Ruang b-metrik merupakan generalisasi dari ruang metrik. Salah satu bahasan yang menarik untuk dikaji dalam ruang b-metrik adalah teorema titik tetap. Pada penelitian ini, ditunjukkan syarat cukup untuk menjamin bahwa eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk beberapa pemetaan kontraksi tergeneralisasi dalam ruang b-metrik, termasuk generalisasi pemetaan kontraksi dalam bentuk rasional. Beberapa contoh diberikan untuk menjamin keberadaaan dan ketunggalan titik tetap di ruang b-metrik.
Kata kunci: Ruang Metrik, Ruang b-Metrik, Titik Tetap, Generalisasi Pemetaan kontraksi, Pemetaan kontraksi rasional..

1. Pendahuluan

Analisis fungsional merupakan salah satu bidang ilmu matematika yang berperan dalam bidang analisis. Salah satu toeri dalam analisis fungsional yang cukup banyak kegunaannya adalah teori titik tetap. Teori titik tetap berawal dari munculnya Prinsip Kontraksi Banach pada tahun 1922, menyatakan keberadaan dan ketunggalan suatu titik tetap fungsi kontraksi dalam ruang metrik lengkap. Teori titik tetap dapat digunakan untuk menjamin eksistensi solusi masalah nilai awal dan syarat batas persamaan differensial berbentuk linier maupun nonlinier.

Beberapa masalah tidak dapat diselesaikan dalam ruang metrik, khususnya kekonvergenan fungsi terukur terhadap suatu ukuran. Sehingga [3] menjelaskan ruang b-metrik yang merupakan generalisasi dari ruang metrik

Pada tahun 1971 [2] memperkenalkan generalisasi kontraksi dan eksistensi titik tetapnya pada ruang metrik lengkap. Kemudian, [7] menggunakan generalisasi kontraksi untuk menunjukkan eksistensi titik tetap pada b-ruang metrik dengan menambahkan beberapa syarat.

[1]*Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*

Selanjutnya akan ditentukan syarat cukup keberadaan dan ketunggalan titik tetap untuk beberapa fungsi kontraksi tergeneralisasi dalam ruang b-metrik.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Ruang Metrik

Definisi 2.1 Diberikan X adalah himpunan tak kosong, maka fungsi

$$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

adalah metrik jika memenuhi kondisi untuk setiap, $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (sifat simetris)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Ketidaksamaan Segitiga).

Himpunan X dilengkapi dengan suatu metrik (X, d), disebut ruang metrik.

2.2. Ruang *b*-Metrik

Definisi 2.2 [6] Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan $k \geq 1$ adalah bilangan real maka fungsi $b: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ adalah b-metrik jika memenuhi kondisi,

1. $b(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
2. $b(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $b(x, y) = b(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetris)
4. $b(x, y) \leq k[b(x, z) + b(z, y)]$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Himpunan X yang dilengkapi dengan suatu b-metrik, dituliskan dengan (X, b) disebut ruang b-metrik.

2.3. Barisan di Ruang *b*-Metrik

Definisi 2.3 [5] Diberikan ruang b-metrik (X, b). Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan **konvergen** jika terdapat $x \in X$ maka $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} b(x_n, x) = 0$, yang artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $p \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq p$ berlaku

$$b(x_n, x) < \varepsilon.$$

Definisi 2.4 [5] Diberikan ruang b-metrik (X, b). Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan barisan *Cauchy* apabila $\lim\limits_{n,m \longrightarrow \infty} b(x_n, x_m) = 0$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $p \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq p$ berlaku

$$b(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definisi 2.5 [5] Ruang b-metrik (X, b) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di X selalu konvergen di X.

2.4. Fungsi Kontraksi

Definisi 2.9 [1] Diberikan (X, d) ruang metrik. Fungsi $T: X \to X$ disebut memenuhi kondisi *Lipschitz* jika terdapat bilangan riil positif L sehingga berlaku

$$d(T(x), T(y)) \leq Ld(x, y),$$

Fungsi T demikian disebut Lipschitzian dan bilangan riil α disebut konstanta Lipschitz.

Definisi 2.10 [1] Diberikan (X, d) suatu ruang metrik. Fungsi $T: X \to X$ disebut fungsi kontraksi pada X jika terdapat bilangan riil positif α dengan $0 \leq \alpha < 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Definisi 2.11 [2] Diberikan (X, d) suatu ruang metrik. Fungsi $T: X \to X$ disebut generalisasi fungsi kontraksi pada X jika terdapat bilangan riil positif $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dengan $\sup\{\alpha + \beta + \gamma + 2.\delta\} < 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) + \delta[d(x, T(y)) + d(y, T(x))].$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Syarat Barisan Cauchy di b-Metrik

Lemma 3.1 *Jika (X, b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan $k \geq 1$ dan $\{x_n\} \subset X$ merupakan barisan dalam ruang b-metrik yang memenuhi persamaan berikut*

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n), \tag{3.1}$$

untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $0 \leq \alpha k < 1$ maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada X.

Bukti.

Berdasarkan Persamaan (3.1) untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ dapat disederhanakan, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^2 \cdot b(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ b(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha^n \cdot b(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Selanjutnya, ambil sebarang $x_n, x_m \in \{x_n\}$. Jika $m > n$, dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga pada ruang b-metrik diperoleh,

$$\begin{aligned} b(x_n, x_m) &\leq k[b(x_n, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, x_m)] \\ &= kb(x_n, x_{n+1}) + kb(x_{n+1}, x_m) \\ &\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2[b(x_{n+1}, x_{n+2}) + b(x_{n+2}, x_m)] \\ &= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^2 b(x_{n+2}, x_m) \\ &\vdots \\ &\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \\ &\quad \ldots + k^{m-n-1}[b(x_{m-2}, x_{m-1}) + b(x_{m-1}, x_m)] \\ &= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \\ &\quad \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n-1} b(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \\ &\quad \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n} b(x_{m-1}, x_m), \end{aligned}$$

berdasarkan Persamaan (3.2) sehingga $b(x_n, x_m)$ menjadi,

$$
\begin{aligned}
b(x_n, x_m) &\leq k\alpha^n \cdot b(x_0, x_1) + k^2\alpha^{n+1} \cdot b(x_0, x_1) + k^3\alpha^{n+2} \cdot b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \\
&\quad ... + k^{m-n-1}\alpha^{m-2} b(x_0, x_1) + k^{m-n}\alpha^{m-1} b(x_0, x_1) \\
&\leq (1 + k\alpha + k^2\alpha^2 + \cdots + k^{m-n-1}\alpha^{m-n-1}) k\alpha^n \cdot b(x_0, x_1) \\
&\leq \left(\frac{1-k^{m-n}\alpha^{m-n}}{1-k\alpha}\right) k\alpha^n \cdot b(x_0, x_1) \\
&\leq \left(\frac{1}{1-k\alpha}\right) k\alpha^n \cdot b(x_0, x_1).
\end{aligned}
$$

Karena $0 \leq k\alpha < 1$ maka $0 \leq \alpha < 1$ sehingga jika diambil limit $m, n \to \infty$ maka

$$\lim_{n,m\to\infty} b(x_n, x_m) = 0$$

diperoleh $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang b-metrik (X, b). ■

3.2. Titik Tetap di Ruang b-Metrik.

Teorema 3.1 *Diberikan* (X, b) *adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien* $k \geq 1$ *dan* $T: X \to X$ *suatu fungsi yang memenuhi persamaan berikut*

$$b(Tx, Ty) \leq \alpha . b(x, y) + \beta . b(x, Tx) + \gamma . b(y, Ty) + \mu[b(x, Ty) + b(y, Tx)], \qquad (3.3)$$

$\forall x, y \in X$, *dan* $\alpha, \beta, \gamma, \mu \geq 0$, *dengan syarat*

$$k\alpha + k\beta + \gamma + (k^2 + k)\mu < 1,$$

maka T *mempunyai titik tetap yang tunggal.*

Bukti.

Diambil sebarang $x_0 \in X$, kemudian didefinisikan fungsi $T: X \to X$ memenuhi Persamaan (3.3) dan didefinisikan barisan $\{x_n\} \subset X$ merupakan pemetaan rekusif dengan $x_n = Tx_{n-1}$, sehingga diperoleh

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \ldots, x_n = Tx_{n-1}, \ldots,$$

berdasarkan barisan $\{x_n\}$ dan fungsi T dapat diketahui bahwa

$$b(x_n, x_{n+1}) = b(Tx_{n-1}, Tx_n). \qquad (3.4)$$

Langkah I. Akan ditunjukkan T merupakan pemetaan kontraktif.

Karena fungsi T memenuhi Persamaan (3.3) maka berdasakan Persamaan (3.4) diperoleh

$$
\begin{aligned}
b(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n) + \beta \cdot b(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + \gamma \cdot b(x_n, Tx_n) + \mu \\
&\quad \cdot [b(x_{n-1}, Tx_n) + b(x_n, Tx_{n-1})], \\
&\leq \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n) + \beta \cdot b(x_{n-1}, x_n) + \gamma \cdot b(x_n, x_{n+1}) + \mu \\
&\quad \cdot [b(x_{n-1}, x_{n+1}) + b(x_n, x_n)] \\
&= \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n) + \beta \cdot b(x_{n-1}, x_n) + \gamma \cdot b(x_n, x_{n+1}) + \mu \\
&\quad \cdot b(x_{n-1}, x_{n+1}) \\
&\leq \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n) + \beta \cdot b(x_{n-1}, x_n) + \gamma \cdot b(x_n, x_{n+1}) + \mu \cdot k \\
&\quad \cdot [b(x_{n-1}, x_n) + b(x_n, x_{n+1})] \\
&\leq \frac{(\alpha + \beta + \mu \cdot k)}{(1 - \gamma - \mu \cdot k)} \cdot b(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}
$$

Jadi

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda \cdot b(x_{n-1}, x_n)$$

dengan $\lambda = \frac{(\alpha+\beta+\mu\cdot k)}{(1-\gamma-\mu\cdot k)}$.

Berdasarkan Persamaan tersebut, untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ hasil di atas dapat disederhanakan sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda \cdot b(x_{n-1}, x_n), \\ &\leq \lambda^2 \cdot b(x_{n-2}, x_{n-1}), \\ &\vdots \\ b(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda^n \cdot b(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Karena fungsi T memenuhi Persamaan (3.3), berlaku syarat

$$k\alpha + k\beta + \gamma + (k^2 + k)\mu < 1,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} k\alpha + k\beta + k^2\mu &< 1 - \gamma - k\mu, \\ k(\alpha + \beta + k\mu) &< 1 - \gamma - k\mu, \\ \frac{\alpha + \beta + \mu \cdot k}{1 - \gamma - \mu \cdot k} &< \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

diperoleh bahwa $0 < \lambda < 1$. Jadi T merupakan pemetaan kontraktif.

Langkah II. Akan ditunjukkan T mempunyai titik tetap.

Karena berdasarkan Persamaan (3.3) yang merupakan pemetaan kontraktif dengan $0 \leq \lambda < 1$, sehingga memenuhi syarat untuk menggunakan Lemma 3.1 maka diperoleh bahwa barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang b-metrik lengkap.

Karena ruang b-metrik X lengkap maka barisan $\{x_n\}$ konvergen, maka terdapat $u \in X$ sehingga,

$$b(x_n, u) \to 0 \text{ untuk } n \to \infty. \tag{3.6}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa u merupakan titik tetap fungsi T.

Diambil sebarang $u, x_n, x_{n+1} \in X$, dengan menggunakan sifat ketaksamaan segitiga b-metrik dapat diketahui bahwa

$$\begin{aligned} b(u, Tu) &\leq k\big(b(u, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, Tu)\big), \\ &= k\big(b(u, x_{n+1}) + b(Tx_n, Tu)\big), \end{aligned}$$

Karena T memenuhi Persamaan (3.3), maka diperoleh

$$\begin{aligned} b(u, Tu) &\leq kb(u, x_{n+1}) + k(\alpha b(x_n, u) + \beta b(x_n, Tx_n) + \gamma b(u, Tu) \\ &\quad + \mu\big(b(x_n, Tu) + b(u, Tx_n)\big)\big), \\ &\leq kb(u, x_{n+1}) + k(\alpha b(x_n, u) + \beta b(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \gamma b(u, Tu) + \mu[b(x_n, Tu) + b(u, x_{n+1})]), \\ &\leq kb(u, x_{n+1}) + k(\alpha b(x_n, u) + \beta b(x_n, x_{n+1}) + \gamma b(u, Tu) \\ &\quad + \mu[kb(x_n, u) + kb(u, Tu) + b(u, x_{n+1})]) \\ &\leq kb(u, x_{n+1}) + k(\alpha b(x_n, u) + \beta \lambda^n b(x_0, x_1) + \gamma b(u, Tu) \\ &\quad + \mu[kb(x_n, u) + kb(u, Tu) + b(u, x_{n+1})]), \end{aligned}$$

$$\leq kb(u,x_{n+1}) + k\alpha b(x_n,u) + k\beta\lambda^n b(x_0,x_1) + k\gamma b(u,Tu) + k^2\mu b(x_n,u) + k^2\mu b(u,Tu) + k\mu b(u,x_{n+1})$$

$$\leq \frac{k + k\mu}{(1 - k\gamma - k^2\mu)} b(u,x_{n+1}) + \frac{k\alpha + k^2\mu}{(1 - k\gamma - k^2\mu)} \cdot b(x_n,u) + \frac{k\beta\lambda^n}{(1 - k\gamma - k^2\mu)} b(x_0,x_1),$$

sehingga dengan menggunakan Persamaan (3.5) dan (3.6), akibatnya untuk $n \to \infty$ diperoleh

$$b(u,Tu) = 0.$$

Jadi $Tu = u$, berarti u titik tetap T.

Langkah III. Akan ditunjukkan ketinggalan titik tetap fungsi T.

Andaikan $u, v \in X$, $u \neq v$ adalah titik tetap fungsi T yang berbeda maka $Tu = u$, $Tv = v$, dan $b(u,v) > 0$. Karena T memenuhi Persamaan (3.3), maka berlaku

$$b(Tu,Tv) \leq \alpha.b(u,v) + \beta.b(u,Tu) + \gamma.b(v,Tv) + \mu[b(u,Tv) + b(v,Tu)]$$
$$\leq \alpha.b(u,v) + \beta.b(u,u) + \gamma.b(v,v) + \mu[b(u,v) + b(v,u)]$$
$$b(u,v) \leq (\alpha + 2\mu)b(u,v),$$

sehingga diperoleh

$$(1 - (\alpha + 2\mu))b(u,v) \leq 0.$$

Karena $k\alpha + k\beta + \gamma + (k^2 + k)\mu < 1$, maka

$$\alpha + 2\mu < k\alpha + k\beta + \gamma + (k^2 + k)\mu < 1,$$

diperoleh $1 - (\alpha + 2\mu) > 0$ maka

$$b(u,v) = 0.$$

Jadi $u = v$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi titik tetap fungsi T adalah tunggal.

Teorema 3.1 menghasilkan beberapa akibat, yaitu:

Akibat 3.1 *Diberikan (X,b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ dan T adalah $T: X \to X$ suatu fungsi yang memenuhi persamaan berikut*

$$b(Tx,Ty) \leq \alpha.b(x,y) + \beta.b(x,Tx) + \gamma.b(y,Ty), \tag{3.7}$$

$\forall x,y \in X$, dan $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$, dengan syarat $k\alpha + k\beta + \gamma < 1$ maka fungsi T mempunyai titik tetap yang tunggal.■

Bukti. Jika $\mu = 0$ pada Persamaan 3.3 akibatnya dengan mengikuti langkah yang sama pada pembuktian titik tetap pada Teorema 3.1 maka akan diperoleh fungsi T mempunyai titik tetap tunggal.

Akibat 3.2 *Diberikan (X,b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ dan T adalah $T: X \to X$ suatu fungsi yang memenuhi persamaan berikut*

$$b(Tx,Ty) \leq \alpha.b(x,y) \tag{3.8}$$

$\forall x,y \in X$, dan $\alpha \geq 0$, dengan syarat $k\alpha < 1$ maka T mempunyai titik tetap yang tunggal.

Bukti. Jika $\beta = \gamma = \mu = 0$ pada Persamaan 3.3 akibatnya dengan mengikuti langkah yang sama pada pembuktian titik tetap pada Teorema 3.1 maka akan diperoleh fungsi T mempunyai titik tetap tunggal.

Teorema 4.2 *Diberikan* (X, b) *adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien* $k \geq 1$ *dan* $T: X \to X$ *suatu fungsi yang memenuhi persamaan berikut*

$$b(Tx, Ty) \leq \frac{\alpha.\left(b(x, Tx) + b(y, Ty)\right)^2 . b(x, y)}{1 + 2. b^2(x, Tx) + 2. b^2(y, Ty)} \tag{4.10}$$

$\forall x, y \in X$, *dan* $\alpha, \beta, \gamma, \mu \geq 0$, *dengan syarat* $k\alpha < 1$ *maka fungsi* T *mempunyai titik tetap yang tunggal.*

Bukti.

Diambil sebarang $x_0 \in X$, kemudian didefinisikan fungsi $T: X \to X$ memenuhi Persamaan (4.10) dan didefinisikan barisan $\{x_n\} \subset X$ merupakan pemetaan rekusif dengan $x_n = Tx_{n-1}$, sehingga diperoleh

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2, \ldots, x_n = Tx_{n-1}, \ldots$$

berdasarkan barisan $\{x_n\}$ dan fungsi T dapat diketahui bahwa

$$b(x_n, x_{n+1}) = b(Tx_{n-1}, Tx_n). \tag{4.11}$$

Langkah I. Akan ditunjukkan T merupakan pemetaan kontraktif.

Karena fungsi T memenuhi Persamaan (4.10) maka berdasakan Persamaan (4.11) diperoleh

$$b(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \frac{\alpha.\left(b(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + b(x_n, Tx_n)\right)^2 . b(x_{n-1}, x_n)}{1 + 2. b^2(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + 2. b^2(x_n, Tx_n)},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{\alpha.\left(b(x_{n-1}, x_n) + b(x_n, x_{n+1})\right)^2 . b(x_{n-1}, x_n)}{1 + 2. b^2(x_{n-1}, x_n) + 2. b^2(x_n, x_{n+1})} \\ &\leq \frac{\alpha.\left(b^2(x_{n-1}, x_n) + b^2(x_n, x_{n+1}) + 2b(x_{n-1}, x_n)b(x_n, x_{n+1})\right).b(x_{n-1}, x_n)}{1+2.b^2(x_{n-1}, x_n) + 2.b^2(x_n, x_{n+1})} \\ &\leq \frac{\alpha.\left(b^2(x_{n-1}, x_n) + b^2(x_n, x_{n+1}) + 2b(x_{n-1}, x_n)b(x_n, x_{n+1})\right).b(x_{n-1}, x_n)}{1+2.b^2(x_{n-1}, x_n) + 2.b^2(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Karena $\left(b(x_{n-1}, x_n) - b(x_n, x_{n+1})\right)^2 \geq 0$ maka

$$\left(b^2(x_{n-1}, x_n) + b^2(x_n, x_{n+1})\right) \geq 2b(x_{n-1}, x_n)b(x_n, x_{n+1}),$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{\alpha. 2(b^2(x_{n-1}, x_n) + b^2(x_n, x_{n+1})). b(x_{n-1}, x_n)}{1 + 2. b^2(x_{n-1}, x_n) + 2. b^2(x_n, x_{n+1})}. \\ &\leq \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan tersebut untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, maka hasil diatas dapat disederhanakan sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha \cdot b(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^2 \cdot b(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ b(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha^n \cdot b(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Berdasarkan syarat $k\alpha < 1$, maka

$$\alpha < \frac{1}{k},$$

diperoleh bahwa $0 < \alpha < 1$. Jadi T merupakan pemetaan kontraktif.

Langkah II. Akan ditunjukkan T mempunyai titik tetap.

Karena berdasarkan Persamaan (4.10) yang merupakan pemetaan kontraktif dengan $0 \leq \alpha < 1$, sehingga memenuhi syarat untuk menggunakan Lemma 4.1 maka diperoleh bahwa barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang b-metrik lengkap. Karena ruang b-metrik X lengkap maka barisan $\{x_n\}$ konvergen, maka terdapat $u \in X$ sehingga,

$$b(x_n, u) \to 0 \text{ untuk } n \to \infty. \tag{4.13}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa u merupakan titik tetap fungsi T.

Diambil sebarang $u, x_n, x_{n+1} \in X$, dengan menggunakan sifat ketaksamaan segitiga b-metrik dan pemetaan T, dapat diketahui bahwa

$$\begin{aligned} b(u, Tu) &\leq k\big(b(u, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, Tu)\big), \\ &= k\big(b(u, x_{n+1}) + b(Tx_n, Tu)\big), \end{aligned}$$

sehingga dengan menggunakan Persamaan (4.10), maka

$$\begin{aligned} b(u, Tu) &\leq k\left(b(u, x_{n+1}) + \frac{\alpha.\big(b(x_n, Tx_n) + b(u, Tu)\big)^2 . b(x_n, u)}{1 + 2.b^2(x_n, Tx_n) + 2.b^2(u, Tu)}\right), \\ &\leq k\left(b(u, x_{n+1}) + \frac{\alpha.\big(b(x_n, x_{n+1}) + b(u, Tu)\big)^2 . b(x_n, u)}{1 + 2.b^2(x_n, x_{n+1}) + 2.b^2(u, Tu)}\right), \\ &\leq k\left(b(u, x_{n+1}) + \frac{\alpha.\big(b^2(x_n, x_{n+1}) + b^2(u, Tu) + 2b(x_n, x_{n+1})b(u, Tu)\big).b(x_n, u)}{1 + 2.b^2(x_n, x_{n+1}) + 2.b^2(u, Tu)}\right). \end{aligned}$$

Karena $\big(b(x_n, x_{n+1}) - b(u, Tu)\big)^2 \geq 0$, maka

$$\big(b^2(x_n, x_{n+1}) + b^2(u, Tu)\big) \geq 2b(x_n, x_{n+1})b(u, Tu),$$

sehingga diperoleh

$$b(u,Tu) \leq k\left(b(u,x_{n+1}) + \frac{\alpha.\left(2.b^2(x_n,x_{n+1}) + 2.b^2(u,Tu)\right).b(x_n,u)}{1+2.b^2(x_n,x_{n+1}) + 2.b^2(u,Tu)}\right)$$

$$\leq k\big(b(u,x_{n+1}) + \alpha.b(x_n,u)\big),$$

dengan menggunakan Persamaan (4.13), maka untuk $n \to \infty$, diperoleh

$$b(u,Tu) = 0$$

Jadi $Tu = u$, berarti u titik tetap T.

Langkah III. Akan ditunjukkan ketinggalan titik tetap fungsi T.

Andaikan $u, v \in X$, $u \neq v$ adalah titik tetap fungsi T yang berbeda maka $Tu = u$, $Tv = v$, dan $b(u,v) > 0$. Karena T memenuhi Persamaan (4.10), maka berlaku

$$b(Tu,Tv) \leq \frac{\alpha.\big(b(u,Tu) + b(v,Tv)\big)^2.b(u,v)}{1+2.b^2(u,Tu)+2.b^2(v,Tv)},$$

sehingga diperoleh

$$b(u,v) \leq \frac{\alpha.\big(b(u,u) + b(v,v)\big)^2.b(u,v)}{1+2.b^2(u,u)+2.b^2(v,v)},$$

maka

$$b(u,v) = 0$$

jadi $u = v$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi titik tetap fungsi T adalah tunggal.■

Contoh 3.1 Diberikan ruang b-metrik $(\mathbb{R}, b)$ dengan $k = 2$ didefinisikan $b(x,y) = |x-y|^2$. Misalkan $X = [0, \frac{1}{4}] \subset \mathbb{R}$ dan $Tx = \frac{1}{3}x^2, \forall x \in X$, maka T memenuhi syarat kontraksi tergeneralisasi Persamaan 3.3 dan memiliki titik tetap.

Bukti.
Diambil sebarang $x, y \in X$,

$$b(Tx,Ty) = b\left(\frac{1}{3}x^2, \frac{1}{3}y^2\right) = \left|\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2\right|^2,$$

sehingga

$$\left|\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2\right|^2 = \frac{|x+y|^2}{9}|x-y|^2.$$

Karena $0 < x < \frac{1}{4}$ dan $0 < y < \frac{1}{4}$, maka

$$|x+y|^2 \leq \frac{1}{4},$$

sehingga diperoleh

$$\left|\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2\right|^2 \leq \frac{1}{36}|x-y|^2$$

$$\leq \frac{1}{36}|x-y|^2 + \frac{1}{7}\left|x - \frac{1}{3}\,x^2 + y - \frac{1}{3}y^2\right|^2$$
$$= \frac{1}{36}|x-y|^2 + \frac{1}{7}\left|\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{y^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{x^2}{3}\right)\right|^2$$
$$= \frac{1}{36}|x-y|^2 + \frac{1}{28}\left|\left(x - \frac{x^2}{3}\right) + \left(y - \frac{y^2}{3}\right) + \left(x - \frac{y^2}{3}\right) + \left(y - \frac{x^2}{3}\right)\right|^2$$
$$\leq \frac{1}{36}|x-y|^2 + \frac{2}{28}\left|\left(x - \frac{x^2}{3}\right) + \left(y - \frac{y^2}{3}\right)\right|^2 + \frac{2}{28}\left|\left(x - \frac{y^2}{3}\right) + \left(y - \frac{x^2}{3}\right)\right|^2$$
$$\leq \frac{1}{36}|x-y|^2 + \frac{4}{28}\left|x - \frac{x^2}{3}\right|^2 + \frac{4}{28}\left|y - \frac{y^2}{3}\right|^2 + \frac{2}{28}\left|\left(x - \frac{y^2}{3}\right) + \left(y - \frac{x^2}{3}\right)\right|^2.$$

Jadi T merupakan kontraksi tergeneralisasi yang sesuai Persamaan 3.3 pada Teorema 3.1,sehingga diperoleh $\alpha = \frac{1}{36}, \beta = \gamma = \frac{4}{32}, \delta = \frac{2}{32}$, dengan

$$2\alpha + 2\beta + \gamma + 6\delta = \frac{2}{36} + \frac{8}{28} + \frac{4}{28} + \frac{12}{28} = \frac{115}{126} < 1.$$

Selanjutnya akan dicari titik tetap untuk fungsi $Tx = \frac{1}{3}x^2$. Definisikan $\{x_n\}$ sebagai barisan di X dengan

$$x_n = T(x_{n-1}) = \frac{1}{3}x_{n-1}^2.$$

Ambil $x = \frac{1}{5} \in X$, sehingga diperoleh

$$x_1 = Tx_0 = T\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{75} = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{15}\right),$$
$$x_2 = Tx_1 = T\left(\frac{1}{75}\right) = \frac{1}{16875} = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{15}\right)^3,$$
$$\vdots$$
$$x_n = Tx_{n-1} = T\left(\left(\frac{1}{15}\right)^{2^{n-1}-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{15}\right)^{2^{n-1}-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{15}\right)^{2^n-1}$$

Karena T merupakan kontraksi tergeneralisasi yang sesuai dengan Persamaan 3.3 sehingga berdasarkan pada Teorema 3.1 mengakibatkan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di X dan oleh karena itu $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik di X. Sekarang akan ditunjukkan limit $\{x_n\}$ untuk $n \to \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{15}\right)^{2^n-1} = 0,$$

sehingga diperoleh titik tetap T adalah $0 \in X$.

4. Kesimpulan

1. Pemetaan T pada suatu ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ mempunyai titik tetap tunggal, jika fungsi T memenuhi kondisi berikut
$$b(Tx,Ty) \leq \alpha.\,b(x,y) + \beta.\,b(x,Tx) + \gamma.\,b(y,Ty)$$
$$+\mu[b(x,Ty) + b(y,Tx)],$$
$\forall x, y \in X$ dan $\alpha, \beta, \gamma, \mu \geq 0$, dengan syarat $k\alpha + k\beta + \gamma + (k^2 + k)\mu < 1$.

2. Pemetaan T pada suatu ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ mempunyai titik tetap tunggal, jika fungsi T memenuhi kondisi berikut
$$b(Tx, Ty) \leq \frac{\alpha.\left(b(x, Tx) + b(y, Ty)\right)^2 . b(x, y)}{1 + 2. b^2(x, Tx) + 2. b^2(y, Ty)},$$
$\forall x, y \in X$, dan $\alpha, \beta, \gamma, \mu \geq 0$, dengan syarat $k\alpha < 1$.

Daftar Pustaka

[1] Agarwal, Ravi P., Meehan, M. Dan O'Regan, D. 2004. "*Fixed Point Theory and Applications.*" London: Cambridge University Press.

[2] Ciric, Ljubomir B. 1971. "*Generalized Contraction and Fixed-Point Theorems".* Publication De L'Institut Mathematique.

[3] Czerwik, S. 1993. "*Contraction Mapping in b-Metric Space".* Acta Math. Inf. Univ Ostravinsis, 5-11.

[4] Dubey, A.K., Shukla, R. dan Dubey, R. P. (2014). "*Some Fixed Point results in b-metric space".* Asian J.Math. Appl, 1-6. India.

[5] Kir, Mehmet dan Kiziltunc, H. 2013. "*On Some Well Known Fixed Point Theorms in b-metric Spaces".* Turkish Jurnal of Analysis and Number Theory Vol. 1. Turki. Science and Education Publishing.

[6] Nurwahyu, Budi. 2017. "*Fixed Point Theorems for Generalized Contraction in Quasi αb-Metric Spaces".* FJMS Volume 101. Allahabad:India. Pushpa Publishing House.

[7] Sarwar, M., & Rahman, M. U. (2015). "*Fixed Point Theorms For Ciric's And Generelized Contraction in b-Metric Spaces*". International Journal of Analysis and Application Volume 7, 70-78. India.

[8] Rahmasari, C., Sunarsini, dan Sadjidon. "*Konvergensi Barisan dan Teorema Titik Tetap pada ruang b-Metrik*". Jurnal Sains dan Seni ITS. Surabaya: Indonesia.